ช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์แบบใหม่ สำหรับผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่

New Wald Confidence Intervals for the Difference between Binomial Proportions Based on Paired Data

ชนกานต์ สังข์บุญชู (Chanakan Sungboonchoo)* วราฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล (Wararit Panichkitkosolkul)**

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อนำเสนอวิธีการปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ (Wald Confidence Interval) ที่ใช้กับผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ ซึ่งผู้วิจัยได้เสนอวิธีการปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นโดยใช้หลักการเพิ่มค่าสังเกตเข้าไปในตารางการณ์จรสองทาง โดยจำลองข้อมูลที่สร้างขึ้นจากการแจกแจงอเนกนาม เพื่อทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่น คือ เปรียบเทียบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(1-\hat{\alpha})$ และค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นในแต่ละสถานการณ์ของข้อมูล เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10, 25 และ 50 ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด $(1-\alpha)$ เท่ากับ 0.9 และ 0.95 โดยทำการทดลองซ้ำ 10,000 ครั้งในแต่ละสถานการณ์ ผลการวิจัยสรุปได้ว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ปรับปรุงโดยการเพิ่มค่าสังเกตด้วยค่า 0.75 เข้าไปในตารางการณ์จรสองทางทั้งสี่ช่อง จะทำให้ช่วงความเชื่อมั่นที่ได้มีประสิทธิภาพที่ดีขึ้น

ABSTRACT

The purpose of this research is to propose the new Wald confidence intervals for the difference between binomial proportions based on paired data by adding observations into two-way contingency table. Paired data simulated by multinomial distribution, then compare the efficiencies of confidence coefficient and average length in each situation. The comparisons were done using 10,000 random samples from the multinomial distribution with sample size (n) of 10, 25 and 50 while values of specified confidence coefficient of 0.9 and 0.95. It is shown that the new Wald confidence interval by adding observations is 0.75 into two-way contingency table have more efficient than the Wald confidence interval.

คำสำคัญ: ช่วงความเชื่อมั่น ข้อมูลแบบจับคู่ ค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น

Keywords: Confidence interval, Paired data, Confidence coefficient

** นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์*

*** รองศาสตราจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์*

บทนำ

การอนุมานทางสถิติ (Statistical Inference) คือ การศึกษาคุณลักษณะของประชากรที่สนใจ ซึ่งมีขนาดใหญ่จะต้องอาศัยคุณลักษณะของตัวอย่างสุ่มที่มาจากประชากรและทำการวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้เพื่อนำไปสรุปอ้างอิงเกี่ยวกับคุณลักษณะของประชากรนั้นว่าเป็นอย่างไร ในการอนุมานทางสถิติแบ่งออกเป็น 2 ลักษณะ คือ การทดสอบสมมติฐานและการประมาณค่า ซึ่งการประมาณค่าพารามิเตอร์นั้นแบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ การประมาณค่าแบบจุดและการประมาณค่าแบบช่วง โดยที่การประมาณค่าแบบช่วงเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์ของประชากรโดยอาศัยตัวประมาณแบบจุดของพารามิเตอร์และการแจกแจงของตัวประมาณนั้น ซึ่งช่วงความเชื่อมั่นที่หามาได้นั้นจะต้องครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ที่สนใจศึกษา ซึ่งจะมีค่าอยู่ในช่วงของขอบเขตล่าง (Lower Bound : L) และขอบเขตบน (Upper Bond : U) โดยสามารถเขียนรูปแบบของช่วงความเชื่อมั่นได้ดังนี้ $L<\theta<U$ เมื่อ θ แทนค่าพารามิเตอร์ ให้อยู่ภายในช่วงนี้ด้วยความเชื่อมั่นระดับหนึ่ง ในกรณีที่ต้องการศึกษาข้อมูลที่เป็นแบบสัดส่วน เช่น สนใจจำนวนนักเรียนชายทั้งหมดที่ศึกษาอยู่ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง สามารถคำนวณหาสัดส่วนของนักเรียนชายได้โดยการนำจำนวนนักเรียนชายทั้งหมดที่ศึกษาอยู่ในโรงเรียนมาหารด้วยจำนวนนักเรียนทั้งหมดที่อยู่ในโรงเรียนแห่งนี้ สามารถคำนวณหาสัดส่วนได้จากสูตรดังนี้ $\hat{p}=\frac{f}{n}$ โดยที่ $\hat{p}$ คือ ตัวประมาณค่าของสัดส่วนประชากรที่สนใจศึกษาของพารามิเตอร์ p ซึ่ง f คือ จำนวนหน่วยตัวอย่างที่มีลักษณะที่สนใจศึกษา และ n คือ จำนวนหน่วยตัวอย่างทั้งหมด (สายชล, 2545)

การวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิตินั้นมีหลายวิธี ซึ่งลักษณะของข้อมูลนั้นขึ้นอยู่กับการออกแบบการทดลองทางสถิติ ในกรณีที่ข้อมูลของประชากรสองกลุ่มไม่เป็นอิสระกัน คือ ข้อมูลของประชากรสองกลุ่มมีลักษณะเป็นแบบจับคู่ การวิเคราะห์ข้อมูลแบบจับคู่นั้นมีความสำคัญและน่าสนใจเนื่องจากพบได้ในงานทางด้านการแพทย์ การทดลองทางวิทยาศาสตร์ โดยใช้กลุ่มตัวอย่างเพียงชุดเดียวแต่ทำการทดลอง 2 ครั้ง ข้อมูลในลักษณะนี้จะพบได้จากการทดลองก่อนและหลัง (Pretest-Posttest) จากการได้รับวิธีการต่างๆที่กระทำต่อหน่วยทดลอง เพื่อดูความแตกต่างของก่อนและหลังการทดลอง และพบได้จากการวัดซ้ำ (Repeated Measure) คือวัดค่าสังเกตจากหน่วยสังเกตผล 2 ครั้ง โดยที่ลักษณะของตัวแปรตามจะมีลักษณะเป็น 2 คำตอบ (Dichotomous) ซึ่งการประมาณค่าแบบช่วงของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ จะศึกษาข้อมูลที่อยู่ในรูปของตารางการณ์จรสองทาง (Two-Way Contigency Table) ดังนี้ (ทวี, 2545)

หน่วยวัด A	หน่วยวัด B	
	1	2
1	f_{11}	f_{12}
2	f_{21}	f_{22}

โดยที่ f_{ij} คือ จำนวนของหน่วยตัวอย่างที่มาจากหน่วยวัด A ระดับที่ i และมาจากหน่วยวัด B ระดับที่ j โดยที่ $i,j=1,2$

$\hat{p}_{ij}=\frac{f_{ij}}{n}$ คือ ความน่าจะเป็นของการสุ่มหน่วยตัวอย่างจากประชากรที่มาจากหน่วยวัด A ระดับที่ i และมาจากหน่วยวัด B ระดับที่ j โดยที่ $i,j=1,2$

n คือ จำนวนของหน่วยตัวอย่างทั้งหมด

ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ ในหลักสูตรสถิติพื้นฐานนั้นนิยมใช้ช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ (Wald confidence interval) ในการคำนวณ เนื่องจากมีสูตรการคำนวณที่ง่ายและไม่ซับซ้อน โดยใช้ตัวประมาณแบบจุด คือ $\hat{p}_{ij} = \dfrac{f_{ij}}{n}$ ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ $(1-\alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ $\theta = p_{21} - p_{12}$ คือ

$$(\hat{p}_{21} - \hat{p}_{12}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_{21} + \hat{p}_{12} - (\hat{p}_{21} - \hat{p}_{12})^2}{n}} \quad \text{(Liu et al., 2002)}$$

เมื่อ $z_{\alpha/2}$ คือ ควอนไทล์ที่ $\dfrac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงปรกติมาตรฐาน โดยที่ $-1 \le p_{21} - p_{12} \le 1$

จากการศึกษางานวิจัยของ Agresti, Coull (1998) จะพบว่าช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์จะมีประสิทธิภาพดีเมื่อนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ แต่เมื่อนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กจะมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (Confidence Coefficient) ที่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Length) ที่กว้างขึ้น ช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์จึงมีประสิทธิภาพที่ไม่ดีนัก เมื่อนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก จึงมีงานวิจัยของ Agresti, Min (2005) ได้พัฒนาช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ที่ใช้ในการประมาณค่าแบบช่วงของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ เมื่อใช้กับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก โดยใช้หลักการเพิ่มค่าสังเกตด้วยค่า $\dfrac{1}{2}$ เข้าไปทั้งสี่ช่องในตารางการณ์จรสองทาง ซึ่งเป็นวิธีการปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นแบบง่ายและพบว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ปรับปรุงขึ้นนี้มีประสิทธิภาพที่ดีขึ้น ดังนั้นจึงต้องมีการพัฒนาช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ที่ใช้ในการประมาณค่าแบบช่วงของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ เมื่อใช้กับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กให้มีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ใกล้เคียงกับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นลง โดยใช้หลักการเพิ่มค่าสังเกตเข้าไปในตารางการณ์จรสองทาง

วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ที่ใช้ในการประมาณค่าแบบช่วงของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ เมื่อใช้กับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก โดยใช้หลักการเพิ่มค่าสังเกตเข้าไปในตารางการณ์จรสองทาง ให้มีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ใกล้เคียงกับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นลง

วิธีการวิจัย

1. ปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ (Wald Confidence Interval) ที่ใช้ในการประมาณค่าแบบช่วงของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ เมื่อใช้กับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก จากสูตรช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์มีตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum likelihood estimator) คือ $\hat{p}_{ij} = \dfrac{f_{ij}}{n}$ ซึ่งเป็นตัวประมาณค่าแบบจุดและมีช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ $(1-\alpha)100\%$ ของ $\theta = p_{21} - p_{12}$ คือ

$$(\hat{p}_{21} - \hat{p}_{12}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_{21} + \hat{p}_{12} - (\hat{p}_{21} - \hat{p}_{12})^2}{n}} \qquad (1)$$

ทำการปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นโดยใช้หลักการเพิ่มค่าสังเกตเข้าไปในตารางการณ์จรสองทาง โดยมีวิธีการปรับปรุง 2 แบบ ดังนี้

1.1 วิธีการปรับปรุงแบบที่ 1

1.1.1 กำหนดให้ C_1 แทนจำนวนค่าสังเกตทั้งหมดที่จะเพิ่มเข้าไปในข้อมูลของตารางการณ์จรสองทางโดยที่ $C_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ กำหนดให้ C_2 แทนจำนวนค่าสังเกตที่จะเพิ่มเข้าไปในข้อมูลของตารางการณ์จรสองทางในแนวทแยงมุมเฉียงขึ้น คือ เพิ่มค่าสังเกต $C_2 = \frac{C_1}{2}$ ให้กับ f_{12} และ f_{21} ดังนี้

หน่วยวัด A	หน่วยวัด B	
	1	2
1	f_{11}	$f_{12}+C_2$
2	$f_{21}+C_2$	f_{22}

1.1.2. ทำการปรับปรุงตัวประมาณค่าแบบจุดโดยใช้หลักการเพิ่มค่าสังเกต คือ $\bar{p}_{ij}^* = \frac{f_{ij}+C_2}{n+C_1}$

เมื่อ $n+C_1$ คือ จำนวนของหน่วยตัวอย่างทั้งหมดที่มีการเพิ่มค่าสังเกตเข้าไป C_1 ค่า จากนั้นจึงนำตัวประมาณค่าแบบจุด คือ $\bar{p}_{ij}^*$ ไปแทนค่าลงในสูตรการคำนวณช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ในสมการที่ (1) จึงทำให้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard error) ของช่วงความเชื่อมั่นที่ปรับปรุงขึ้นนี้มีค่าเท่ากับ $\sqrt{\frac{\bar{p}_{21}^* + \bar{p}_{12}^* - (\bar{p}_{21}^* - \bar{p}_{12}^*)^2}{n+C_1}}$ ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ที่ทำการปรับปรุงแล้ว $(1-\alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ $\theta = p_{21} - p_{12}$ คือ

$$(\bar{p}_{21}^* - \bar{p}_{12}^*) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}_{21}^* + \bar{p}_{12}^* - (\bar{p}_{21}^* - \bar{p}_{12}^*)^2}{n+C_1}} \qquad (2)$$

เมื่อ $z_{\alpha/2}$ แทน ควอนไทล์ที่ $\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงปรกติมาตรฐาน โดยที่ $-1 \le p_{21} - p_{12} \le 1$

1.2 วิธีการปรับปรุงแบบที่ 2

1.2.1 กำหนดให้ C_3 แทนจำนวนค่าสังเกตทั้งหมดที่จะเพิ่มเข้าไปในข้อมูลของตารางการณ์จรสองทาง โดยที่ $C_3 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ กำหนดให้ $C_4 = \frac{C_3}{4}$ แทนจำนวนค่าสังเกตที่จะเพิ่มเข้าไปในข้อมูลของตารางการณ์จรสองทาง ทั้งสี่ช่อง คือ เพิ่มค่าสังเกต $C_4 = \frac{C_3}{4}$ ให้กับ f_{11}, f_{12}, f_{21} และ f_{22} ดังนี้

หน่วยวัด A	หน่วยวัด B	
	1	2
1	$f_{11}+C_4$	$f_{12}+C_4$
2	$f_{21}+C_4$	$f_{22}+C_4$

1.2.2 ทำการปรับปรุงตัวประมาณค่าแบบจุดโดยใช้หลักการเพิ่มค่าสังเกต คือ $\hat{p}_{ij}^{*}=\dfrac{f_{ij}+C_4}{n+C_3}$

เมื่อ $n+C_3$ คือ จำนวนของหน่วยตัวอย่างทั้งหมดที่มีการเพิ่มค่าสังเกตเข้าไป C_3 ค่า จากนั้นจึงนำตัวประมาณค่าแบบจุด คือ $\hat{p}_{ij}^{*}$ ไปแทนค่าลงในสูตรการคำนวณช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ในสมการที่ (1) จึงทำให้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard error) ของช่วงความเชื่อมั่นที่ปรับปรุงขึ้นนี้มีค่าเท่ากับ $\sqrt{\dfrac{\hat{p}_{21}^{*}+\hat{p}_{12}^{*}-(\hat{p}_{21}^{*}-\hat{p}_{12}^{*})^2}{n+C_3}}$ ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ที่ทำการปรับปรุงแล้ว $(1-\alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ $\theta=p_{21}-p_{12}$ คือ

$$(\hat{p}_{21}^{*}-\hat{p}_{12}^{*})\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_{21}^{*}+\hat{p}_{12}^{*}-(\hat{p}_{21}^{*}-\hat{p}_{12}^{*})^2}{n+C_3}} \tag{3}$$

เมื่อ $z_{\alpha/2}$ แทน ควอนไทล์ที่ $\dfrac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงปรกติมาตรฐาน โดยที่ $-1\le p_{21}-p_{12}\le 1$

2. สร้างข้อมูลที่ใช้ในการวิจัยโดยการจำลองข้อมูลแบบจับคู่ (Simulation Techniques) โดยใช้โปรแกรม R เวอร์ชัน 3.4.1 สร้างข้อมูลในรูปของตารางการณ์จรสองทาง โดยสร้างข้อมูลที่มาจากการแจกแจงอเนกนาม (Multinomial Distribution) โดยกำหนดค่าพารามิเตอร์ของสัดส่วน (p_{ij}) ให้กับข้อมูลในตารางการณ์จรสองทางทั้งหมด 11 การแจกแจง ให้มีค่าแตกต่างกันคือ p_{11}, p_{12}, p_{21} และ p_{22} โดยที่ $p_{11}+p_{12}+p_{21}+p_{22}=1$ นั่นคือ 1) กรณีที่สัดส่วนของการแจกแจงข้อมูลมีค่าเท่ากันทั้ง 4 ค่า 2) กรณีที่สัดส่วนของการแจกแจงข้อมูลมีค่าใกล้เคียงกัน 3 ค่า ส่วนอีก 1 ค่า มีค่าที่สูงมาก และ 3) กรณีที่สัดส่วนของการแจกแจงข้อมูลมีค่าเป็นศูนย์ 1 ค่า ดังแสดงในตารางที่ 1

ตารางที่ 1 ข้อมูลแบบจับคู่ที่สร้างจากการแจกแจงอเนกนามที่กำหนดค่าพารามิเตอร์ของสัดส่วน (p_{ij}) 11 การแจกแจง

กรณีที่ 1				**กรณีที่ 2**				**กรณีที่ 3**			
p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}
0.25	0.25	0.25	0.25	0.2	0.6	0.1	0.1	0.05	0.9	0	0.05
				0.1	0.2	0.1	0.6	0.1	0.7	0	0.2
				0.6	0.1	0.2	0.1	0.3	0.3	0	0.4
				0.1	0.1	0.6	0.2	0.3	0	0.3	0.4
								0.1	0	0.7	0.2
								0.05	0	0.9	0.05

ซึ่งข้อมูลแบบจับคู่จะมีค่าพารามิเตอร์ของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ คือ $\theta=p_{21}-p_{12}$ มีค่าเท่ากับ -0.9, -0.7, -0.5, -0.3, -0.1, 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9 และมีการกำหนดขนาดตัวอย่าง (n) ที่ใช้ คือ10, 25 และ 50

3. คำนวณช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่โดยวิธีของวาลด์และโดยวิธีที่ปรับปรุงขึ้นใหม่ทั้ง 2 แบบ โดยใช้สูตรการคำนวณในสมการที่ (1), (2) และ (3) ตามลำดับ

4. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการทดลอง โดยนำช่วงความเชื่อมั่นที่คำนวณได้มาพิจารณาว่าครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ $\theta=p_{21}-p_{12}$ หรือไม่ ถ้าช่วง

ความเชื่อมั่นที่คำนวณได้นั้นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์จะทำการนับจำนวนครั้งและบวกสะสมค่าไว้ เมื่อทำซ้ำครบจำนวน 10,000 ครั้ง ก็จะนำค่าสะสมที่ได้ของช่วงความเชื่อมั่นที่ครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่มาหารด้วยจำนวนรอบ ซึ่งจะเรียกค่าที่ได้ว่า ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(1-\hat{\alpha})$ สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$(1-\hat{\alpha}) = \frac{[\text{จำนวนครั้งทั้งหมดที่ช่วงความเชื่อมั่นครอบคลุมค่าพารามิเตอร์ } p_{21}-p_{12}\ ]}{10{,}000}$$

5. ทำการเปรียบเทียบค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น $(1-\hat{\alpha})$ ว่ามีค่าเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด $(1-\alpha_0)$ อย่างมีนัยสำคัญหรือไม่ สามารถเขียนสมมติฐานในการทดสอบได้ดังนี้

$$H_0 : P = P_0$$

$$H_1 : P \neq P_0$$

จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อ $\dfrac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{M}}} \geq z_{\alpha^*/2}$ หรือ $\dfrac{\hat{P}-P_0}{\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{M}}} \leq -z_{\alpha^*/2}$

จะได้ว่า $\hat{P} \geq P_0 + z_{\alpha^*/2}\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{M}}$ หรือ $\hat{P} \leq P_0 - z_{\alpha^*/2}\sqrt{\dfrac{P_0(1-P_0)}{M}}$

เมื่อ P คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น หรือ $P = 1-\alpha$

P_0 คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด หรือ $P_0 = 1-\alpha_0$

$\hat{P}$ คือ สัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ได้จากการทดลอง หรือ $\hat{P} = 1-\hat{\alpha}$

M คือ จำนวนรอบของการทดลอง ในที่นี้คือ 10,000 รอบ

α^* คือ ระดับนัยสำคัญของการทดสอบ ในที่นี้กำหนดให้เท่ากับ 0.05

$z_{\alpha^*/2}$ คือ ควอนไทล์ที่ $\dfrac{\alpha^*}{2}$ ของการแจกแจงปรกติมาตรฐาน

ดังนั้นเกณฑ์ที่ใช้ในการตัดสินใจ คือ

เมื่อ $1-\alpha_0 = 0.90$ แสดงว่าช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่นั้นให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อค่า

$$0.89412 \leq 1-\hat{\alpha} \leq 0.90588$$

เมื่อ $1-\alpha_0 = 0.95$ แสดงว่าช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่นั้นให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อค่า

$$0.94573 \leq 1-\hat{\alpha} \leq 0.95427$$

หากช่วงความเชื่อมั่นใดให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด แสดงว่าช่วงความเชื่อมั่นนั้นมีประสิทธิภาพและจะพิจารณาค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น แต่ถ้าช่วงความเชื่อมั่นใดให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด แสดงว่าช่วงความเชื่อมั่นนั้นไม่มีประสิทธิภาพ และจะไม่นำมาพิจารณาค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น

6. คำนวณค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Average Length) โดยคำนวณหาผลต่างระหว่างขอบเขตบนและขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่นทั้งหมดที่คำนวณได้จากข้อ 5. แล้วนำผลต่างทั้งหมดของช่วงความเชื่อมั่นมารวมกันแล้วจึงหารด้วยจำนวนรอบของการทำซ้ำ สามารถคำนวณได้จากสูตรต่อไปนี้

ค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (AL) $= \dfrac{\sum_{j=1}^{10000}(U_j - L_j)}{10000}$

เมื่อ U_j, L_j คือ ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของช่วงความเชื่อมั่น ในการทำซ้ำรอบที่ j
โดยที่ $j = 1, 2, \ldots, 10000$

ถ้าช่วงความเชื่อมั่นใดให้ค่าประมาณของความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นที่สุด แสดงว่าช่วงความเชื่อมั่นนั้นมีประสิทธิภาพที่สุด

7. จะได้สูตรช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ที่ปรับปรุงโดยใช้หลักการเพิ่มค่าสังเกตเข้าไปในตารางการณ์จรสองทาง

ผลการวิจัย

ในการปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ทั้ง 2 แบบ จะพบว่าเมื่อเพิ่มค่าสังเกตด้วยค่า 0.5 เข้าไปในตารางการณ์จรสองทางในแนวทแยงมุมเฉียงขึ้น คือ เพิ่มค่าเข้าไปใน f_{12} และ f_{21} นั่นคือเมื่อมีการเพิ่มค่าสังเกตเข้าไปในตารางการณ์จรสองทาง จะทำให้มีจำนวนของหน่วยตัวอย่างทั้งหมดเท่ากับ n+1 และเมื่อเพิ่มค่าสังเกตด้วยค่า 0.75 เข้าไปในตารางการณ์จรสองทางทั้งสี่ช่อง คือ เพิ่มค่าเข้าไปใน f_{11}, f_{12}, f_{21} และ f_{22} นั่นคือเมื่อมีการเพิ่มค่าสังเกตเข้าไปในตารางการณ์จรสองทาง จะทำให้มีจำนวนของหน่วยตัวอย่างทั้งหมดเท่ากับ n+3 จะพบว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ปรับปรุงขึ้นนี้จะมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ใกล้เคียงกับค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นลงในหลายสถานการณ์ที่มีการจำลองข้อมูลจากการแจกแจงอเนกนามที่มีค่าสัดส่วนของข้อมูล ดังนี้

1. กรณีที่สัดส่วนของการแจกแจงข้อมูลมีค่าเท่ากันทั้ง 4 ค่า คือ $p_{11} = p_{12} = p_{21} = p_{22}$ จะพบว่าช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ที่ปรับปรุงขึ้นใหม่ทั้ง 2 แบบ คือ New1 และ New2 จะมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าประมาณของความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นลงใน 1 สถานการณ์ ในขณะที่ช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ (Wald) มีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าประมาณของความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นลงใน 1 สถานการณ์ ดังแสดงในตารางที่ 2

ตารางที่ 2 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เมื่อสัดส่วนของการแจกของข้อมูลมีค่าเท่ากัน

			$1-\hat{\alpha}$			AL		
θ	n	$1-\alpha$	**New1**	**New2**	**Wald**	**New1**	**New2**	**Wald**
0	10	0.9	0.8648	0.9338	0.8648	-	-	-
		0.95	0.9336	0.9739	0.9008	-	-	-
	25	0.9	**0.9012**	0.9095	0.8848	**0.4539**	-	-
		0.95	0.9450	**0.9478**	0.9370	-	**0.5127**	-
	50	0.9	0.9078	0.9073	**0.8945**	-	-	**0.3241**
		0.95	0.9455	0.9421	0.9373	-	-	-

หมายเหตุ: ตัวหนา หมายถึง วิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในเกณฑ์ของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นสั้นที่สุด

- หมายถึง ไม่มีการหาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เพราะวิธีการประมาณให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในเกณฑ์ของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

2. กรณีที่สัดส่วนของการแจกแจงของข้อมูลมีค่าใกล้เคียงกัน 3 ค่า ส่วนอีก 1 ค่า มีค่าที่สูงมาก จะพบว่าช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ที่ปรับปรุงขึ้นแบบที่ 2 (New2) จะมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นลงในหลายสถานการณ์ ส่วนช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ที่ปรับปรุงขึ้นแบบที่ 1 (New1) จะมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นลงในบางสถานการณ์ ในขณะที่ช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ (Wald) จะมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกสถานการณ์ ดังแสดงในตารางที่ 3

ตารางที่ 3 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าประมาณของความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เมื่อสัดส่วนของการแจกแจงของข้อมูลมีค่าใกล้เคียงกัน 3 ค่า ส่วนอีก 1 ค่า มีค่าที่สูงมาก

			$1-\hat{\alpha}$			AL		
θ	n	$1-\alpha$	**New1**	**New2**	**Wald**	**New1**	**New2**	**Wald**
-0.5	10	0.9	0.9256	0.8814	0.8602	-	-	-
		0.95	0.9398	**0.9461**	0.8685	-	**0.7455**	-
	25	0.9	0.8963	**0.901**	0.8584	-	**0.4224**	-
		0.95	0.9520	**0.9475**	0.9252	-	**0.5034**	-
	50	0.9	0.8926	**0.902**	0.8882	-	**0.3051**	-
		0.95	0.9520	**0.9491**	0.9382	-	**0.3633**	-
-0.1	10	0.9	0.9388	0.9388	0.8313	-	-	-
		0.95	0.9667	0.9827	0.8716	-	-	-
	25	0.9	0.9088	0.9182	0.8874	-	-	-
		0.95	**0.9508**	0.9582	0.9249	**0.4220**	-	-
	50	0.9	0.9067	0.9077	0.8874	-	-	-
		0.95	0.9519	**0.9495**	0.9377	-	**0.2923**	-
0.1	10	0.9	0.9370	0.9370	0.8276	-	-	-
		0.95	0.9679	0.9832	0.8697	-	-	-
	25	0.9	**0.9006**	0.9201	0.8928	**0.3540**	-	-
		0.95	**0.9516**	0.9594	0.9286	**0.4230**	-	-
	50	0.9	0.9073	0.9059	0.8869	-	-	-
		0.95	0.9462	**0.9525**	0.9435	-	**0.2921**	-

ตารางที่ 3 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าประมาณของความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เมื่อสัดส่วนของการแจกแจงของข้อมูลมีค่าใกล้เคียงกัน 3 ค่า ส่วนอีก 1 ค่า มีค่าที่สูงมาก (ต่อ)

θ	n	$1-\alpha$	$1-\hat{\alpha}$ New1	$1-\hat{\alpha}$ New2	$1-\hat{\alpha}$ Wald	AL New1	AL New2	AL Wald
0.5	10	0.9	0.9261	0.8867	0.8603	-	-	-
		0.95	0.9438	**0.9477**	0.8677	-	**0.7467**	-
	25	0.9	0.8944	**0.896**	0.8574	-	**0.4223**	-
		0.95	0.9508	**0.9474**	0.9226	-	**0.5027**	-
	50	0.9	0.8938	**0.9026**	0.8878	-	**0.3056**	-
		0.95	0.9475	**0.9499**	0.9401	-	**0.3632**	-

หมายเหตุ: ตัวหนา หมายถึงวิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในเกณฑ์ของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นสั้นที่สุด

- หมายถึง ไม่มีการหาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เพราะวิธีการประมาณให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในเกณฑ์ของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

3. กรณีที่สัดส่วนของการแจกแจงของข้อมูลที่มีค่าเป็นศูนย์ 1 ค่า

จะพบว่าช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ที่ปรับปรุงแบบที่ 2 (New2) จะมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นลงในหลายสถานการณ์ ในขณะที่ช่วงความเชื่อมั่นที่ปรับปรุงแบบที่ 1 (New1) จะมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และมีค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นลงในบางสถานกาณ์ ในขณะที่ช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์ (Wald) จะมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในหลายสถานการณ์ ดังแสดงในตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เมื่อสัดส่วนของการแจกแจงของข้อมูลที่มีค่าเป็นศูนย์ 1 ค่า

θ	n	$1-\alpha$	$1-\hat{\alpha}$ New1	$1-\hat{\alpha}$ New2	$1-\hat{\alpha}$ Wald	AL New1	AL New2	AL Wald
-0.9	10	0.9	0.9869	0.7385	0.6411	-	-	-
		0.95	0.9862	0.9295	0.6538	-	-	-
	25	0.9	0.9670	0.8984	0.9182	-	-	-
		0.95	0.9895	0.9658	0.9166	-	-	-
	50	0.9	0.9397	0.8780	0.8629	-	-	-
		0.95	0.9843	0.9428	0.8847	-	-	-

ตารางที่ 4 ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นและค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เมื่อสัดส่วนของการแจกแจงของข้อมูลที่มีค่าเป็นศูนย์ 1 ค่า (ต่อ)

θ	n	$1-\alpha$	$1-\hat{\alpha}$ New1	$1-\hat{\alpha}$ New2	$1-\hat{\alpha}$ Wald	AL New1	AL New2	AL Wald
-0.7	10	0.9	0.9287	0.8511	0.8141	-	-	-
		0.95	0.9516	**0.9524**	0.8440	-	**0.6444**	-
	25	0.9	0.9273	**0.9002**	0.8618	-	**0.3294**	-
		0.95	0.9704	0.9513	**0.9477**	-	-	**0.3499**
	50	0.9	0.9140	0.9084	0.8760	-	-	-
		0.95	0.9558	**0.9467**	0.9356	-	**0.2684**	-
-0.3	10	0.9	0.8417	0.8506	0.8020	-	-	-
		0.95	0.9640	0.9707	0.8392	-	-	-
	25	0.9	0.8962	**0.9014**	0.8618	-	**0.3054**	-
		0.95	0.9617	0.9051	0.9444	-	-	-
	50	0.9	**0.8971**	0.9075	0.8736	**0.2172**	-	-
		0.95	0.9465	**0.9538**	0.9334	-	**0.2562**	-
0.3	10	0.9	0.8417	0.8506	0.8020	-	-	-
		0.95	0.9640	0.9707	0.8392	-	-	-
	25	0.9	0.8962	**0.9014**	0.8618	-	**0.3054**	-
		0.95	0.9617	0.9051	0.9444	-	-	-
	50	0.9	**0.8971**	0.9075	0.8736	**0.2172**	-	-
		0.95	0.9465	**0.9538**	0.9334	-	**0.2562**	-
0.7	10	0.9	0.9287	0.8511	0.8141	-	-	-
		0.95	0.9516	**0.9524**	0.8440	-	**0.6444**	-
	25	0.9	0.9273	**0.9002**	0.8618	-	**0.3294**	-
		0.95	0.9704	0.9513	**0.9477**	-	-	**0.3499**
	50	0.9	0.9140	0.9084	0.876	-	-	-
		0.95	0.9558	**0.9467**	0.9356	-	**0.2684**	-
0.9	10	0.9	0.9869	0.7385	0.6411	-	-	-
		0.95	0.9862	0.9295	0.6538	-	-	-
	25	0.9	0.9670	**0.8984**	0.9182	-	**0.2831**	-
		0.95	0.9895	0.9658	0.9166	-	-	-
	50	0.9	0.9397	0.8780	0.8629	-	-	-
		0.95	0.9843	0.9428	0.8847	-	-	-

หมายเหตุ: ตัวหนา หมายถึงวิธีการประมาณที่ให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นอยู่ในเกณฑ์ของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นสั้นที่สุด

- หมายถึง ไม่มีการหาค่าความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เพราะวิธีการประมาณให้ค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นไม่อยู่ในเกณฑ์ของค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

ในการปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ ในกรณีที่สัดส่วนของการแจกแจงของข้อมูลมีค่าเท่ากันทั้ง 4 ค่า กรณีที่สัดส่วนของการแจกแจงของข้อมูลมีค่าใกล้เคียงกัน 3 ค่า ส่วนอีก 1 ค่ามีค่าที่สูงมาก และในกรณีที่สัดส่วนของการแจกแจงของข้อมูลมีค่าเป็นศูนย์ 1 ค่า ซึ่งผลการทดลองในการปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นของผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ โดยใช้หลักการเพิ่มค่าสังเกตเข้าไปในตารางการณ์จรสองทาง จะพบว่าเมื่อเพิ่มค่าสังเกตด้วยค่า 0.75 เข้าไปในตารางการณ์จรสองทางทั้งสี่ช่อง จะทำให้ช่วงความเชื่อมั่นที่ปรับปรุงขึ้นแบบที่ 2 (New2) จะมีค่าประมาณสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่ไม่ต่ำกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและมีค่าประมาณความกว้างเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่สั้นลง ซึ่งครอบคลุมหลายสถานการณ์ของการแจกแจงที่ศึกษา ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นของวาลด์แบบใหม่สำหรับผลต่างของสัดส่วนทวินามโดยใช้กับข้อมูลแบบจับคู่ $(1-\alpha)100\%$ ของพารามิเตอร์ $\theta = p_{21} - p_{12}$ คือ

$$(\hat{p}^*_{21} - \hat{p}^*_{12}) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}^*_{21} + \hat{p}^*_{12} - (\hat{p}^*_{21} - \hat{p}^*_{12})^2}{n+3}} \quad \text{โดยที่} \quad \hat{p}^*_{ij} = \frac{f_{ij} + 0.75}{n+3}$$

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับทุนสนับสนุนการศึกษาจากโครงการทุนเรียนดีวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย และได้รับความช่วยเหลือทางด้านอุปกรณ์คอมพิวเตอร์จากสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ผู้วิจัยใคร่ขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงมา ณ โอกาสนี้

เอกสารอ้างอิง

ทวี รื่นจินดา. สถิติไร้พารามิเตอร์. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยรามคำแหง; 2545.

สายชล สินสมบูรณ์ทอง. สถิติคณิตศาสตร์ 1. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง; 2545.

Agresti A, Coull BA. Approximate is better than exact for interval estimation of binomial proportions. The American Statistician 1998; 52(2): 119-126.

Agresti A, Min Y. Simple improved confidence intervals for comparing matched proportions. Statistics in Medicine 2005; 24(5): 729-740.

Liu JP, Hsueh HM, Hsieh E, Chen JJ. Tests for equivalence or non-inferiority for paired binary data. Statistics in Medicine 2002; 21(2): 231-245.