ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากรและปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต

Confidence Intervals for the Reciprocal of a Normal Mean with a Known Population Standard Deviation and a Restricted Parameter Space

กุลนิดา เหมะรักษ์ (Kulnida Hemaruk)* วรากฤทธิ์ พานิชกิจโกศลกุล (Wararit Panichkitkosolkul)**

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเสนอช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร โดยผู้วิจัยได้นำเสนอช่วงความเชื่อมั่นที่ปรับปรุงมาจากช่วงที่เสนอโดย Wongkhao et al. (2013) และ Panichkitkosolkul (2017) ซึ่งได้ใช้ทฤษฎีและบทแทรกของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน นอกจากนี้ได้นำเสนอช่วงความเชื่อมั่นกรณีที่ปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต ในงานวิจัยนี้ได้ใช้เทคนิคการจำลองมอนติคาร์โลโดยพิจารณาค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมและค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นดังกล่าว ผลจากการวิจัยพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นที่ปรับปรุงใหม่ทุกช่วงจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่ไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ และเมื่อขนาดตัวอย่างมีค่าเพิ่มขึ้น ความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีแนวโน้มลดลง

ABSTRACT

This research proposes new confidence intervals for the reciprocal of a normal mean with a known population standard deviation. These confidence intervals were adjusted from confidence intervals for the reciprocal of a normal mean with a known coefficient of variation presented by Wongkhao et al. (2013) and Panichkitkosolkul (2017). The authors used the theory and corollary of the confidence intervals with known coefficient of variation. Moreover, this research proposes the new confidence intervals with the restricted parameter space. Monte Carlo simulation technique was applied in this research by considering the coverage probability and expected length in order to compare the efficiency of the confidence intervals. The results show that the four new confidence intervals are more coverage probability than the 95% confidence level that is determined when the sample size are large, and expected lengths of these four intervals tend to decrease when the sample size increase.

คำสำคัญ: การประมาณค่าแบบช่วง ค่าวัดแนวโน้มเข้าสู่ส่วนกลาง ค่าวัดการกระจาย

Keywords: Interval estimation, Central tendency, Dispersion measurement

** นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์*

*** รองศาสตราจารย์ สาขาวิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์*

บทนำ

การอนุมานเชิงสถิติ (Statistical Inference) สามารถแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะดังนี้ การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Estimation) และการทดสอบสมมติฐาน (Test of Hypothesis) การประมาณค่าพารามิเตอร์ เป็นกระบวนการของการใช้กลุ่มตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรที่ต้องการศึกษา เพื่อประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงที่สนใจ มีวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือ การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation) และการประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)

ในการประมาณค่าแบบช่วงนั้น มีงานวิจัยจำนวนมากที่สนใจศึกษาเกี่ยวกับการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เช่น ในงานวิจัยของ Wang (2006) ได้นำเสนอช่วงความเชื่อมั่นในการประมาณค่าแบบช่วงสำหรับค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ โดยช่วงความเชื่อมั่นดังกล่าวได้มาจากค่าพี (P-value) แบบปรับค่า ในเวลาต่อมาก็เริ่มมีการสนใจเกี่ยวกับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ นั่นคือ $\theta = \dfrac{1}{\mu}$ โดยที่ μ คือ ค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ โดยมีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในหลายสาขาวิชา อาทิ ฟิสิกส์นิวเคลียร์ วิทยาศาสตร์ชีวภาพ การเกษตร และเศรษฐศาสตร์ เช่น ในงานวิจัยของ Lamanna et al. (1981) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับโมเมนตัมของอนุภาค (Particle Momentum) $p = \dfrac{1}{\mu}$ โดยที่ μ คือ เส้นทางการเคลื่อนที่โดยเฉลี่ย (Track) ของอนุภาค Wongkhao et al. (2013) เสนอช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation) โดยได้นำเสนอทฤษฎีและบทแทรกของค่าคาดหวัง (Expected Value) และค่าความแปรปรวน (Variance) ของส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากร มาใช้ในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นของส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากร ต่อมา Panichkitkosolkul (2017) ได้ปรับปรุงช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (Coefficient of Variation) โดยได้นำเสนอทฤษฎีที่ปรับปรุงมาจากทฤษฎีของ Wongkhao et al. (2013) ในการประมาณค่าแบบช่วงดังกล่าวนั้น ยังมีงานวิจัยที่สนใจในกรณีที่มีการทราบค่าความแปรปรวน (Variance) ของประชากร เช่น ในงานวิจัยของ Stein, Wald (1947) งานวิจัยของ Pratt (1963) และงานวิจัยของ Wolfowitz (1950) ที่ได้นำเสนอช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติแบบต่าง ๆ เมื่อทราบค่าความแปรปรวน

เนื่องจากงานวิจัยในหลากหลายแขนงที่สนใจศึกษานั้น ไม่ว่าจะเป็นในด้านฟิสิกส์นิวเคลียร์ ด้านวิทยาศาสตร์ชีวภาพ ด้านการเกษตร และด้านเศรษฐศาสตร์ โดยส่วนใหญ่จะเป็นกรณีที่ปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขตทั้งสิ้น เช่น ค่าขอบเขตความดันเลือดของผู้ป่วย และค่าขอบเขตน้ำหนักของคน Mandelkern (2002) ได้กล่าวว่า วิธีการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นแบบเนย์แมน (Neyman Procedure) ไม่เพียงพอที่จะใช้ในการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นกรณีที่ปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว Wang (2008) จึงได้นำเสนอการหาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์โดยที่ปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต ซึ่งสามารถหาได้โดยการหาช่วงความเชื่อมั่นร่วม (Intersection) ระหว่างปริภูมิพารามิเตอร์กับช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ที่หามาได้ด้วยวิธีการต่าง ๆ ทางสถิติ ต่อมา Panichkitkosolkul (2017) ได้ประยุกต์แนวคิดของ Wang (2008) สำหรับหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต

ในงานวิจัยนี้จึงสนใจศึกษาในสองประเด็น คือ กรณีการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และกรณีปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต โดยในส่วนของกรณีการประมาณค่าช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน การสร้างช่วงดังกล่าวนั้นได้ดัดแปลงมาจากช่วงความเชื่อมั่นของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติที่ Wongkhao et al. (2013)

และ Panichkitkosolkul (2017) ได้นำเสนอไว้ และนอกจากนั้นได้นำกรณีที่ปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขตมาประยุกต์ใช้กับสองช่วงดังกล่าวที่ได้สร้างขึ้นมาใหม่ด้วย จะได้ว่าในงานวิจัยนี้สนใจทีจะศึกษาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานทั้งหมด 4 ช่วง โดยเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นในงานวิจัยนี้ คือ ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม (Coverage Probability) และค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น (Expected Length)

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อเสนอช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต
2. เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต

วิธีการวิจัย

วิธีการวิจัยในงานวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย แผนการวิจัย ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง และเกณฑ์ที่ใช้พิจารณาประสิทธิภาพของช่วงความเชื่อมั่น โดยมีรายละเอียดดังนี้

แผนการวิจัย

ในงานวิจัยได้จำลองข้อมูลจากโปรแกรม R โดยมีการกำหนดค่าต่าง ๆ ไว้ดังนี้

1. กำหนดขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 10, 20, 30, 50 และ 100
2. ระดับความเชื่อมั่นที่กำหนดในงานวิจัยนี้ คือ 95%
3. กำหนดให้ข้อมูลมีการแจกแจงปรกติที่มีค่าเฉลี่ยประชากร (μ) เท่ากับ 5, 1 และ 1/5 และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) กำหนดตามค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน $\left(\tau = \sigma/\mu\right)$ เมื่อ τ เท่ากับ 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.30, 0.40 และ 0.50
4. ทำการจำลองทั้งหมด 10,000 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนด

การประมาณค่าแบบช่วงสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากร $\left(1/\mu\right)$ กรณีข้อมูลปริภูมิพารามิเตอร์ไม่มีขอบเขต

ในกรณีนี้จะนำเสนอช่วง 2 ช่วงที่ปรับมาจากทฤษฎีและบทแทรก ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1

กำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรปรกติ โดยมีค่าเฉลี่ยประชากร μ และ ความแปรปรวน σ^2 และตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ ที่สนใจ คือ $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$ เมื่อ $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ แล้ว ค่าคาดหวังของ $\hat{\theta}$ และ $\hat{\theta}^2$ คือ

$$E\left(\hat{\theta}\right) = \theta\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{\tau^2}{n}\right)^k\right] \text{ และ } E\left(\hat{\theta}^2\right) = \theta^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{2^k k!}\left(\frac{\tau^2}{n}\right)^k$$

เมื่อ ทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน τ (Wongkhao et al., 2013)

จากทฤษฎีบทที่ 1 นำมาปรับใช้กับกรณีประมาณค่าแบบช่วงสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ได้ดังนี้ จาก $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{\tau^2}{n}\right)^k\right]$ เมื่อแทนค่า $\tau = \frac{\sigma}{\mu}$ แล้วจะได้ว่า

$E\left(\hat{\theta}\right)=\theta\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{\sigma^2}{n\mu^2}\right)^k\right]$ ซึ่งพบว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณเอนเอียงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotically biased estimator) ของ θ กล่าวคือ ตัวประมาณนี้จะเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง (Unbiased estimator) ที่ขนาดตัวอย่างมีค่าลู่เข้าสู่อนันต์ จึงต้องปรับให้ตัวประมาณดังกล่าวเป็นตัวประมาณไม่เอนเอียง ดังนี้ $E\left(\frac{\hat{\theta}}{\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{\sigma^2}{n\mu^2}\right)^k\right]}\right)=\theta$

หรือ $E\left(\hat{\theta}_1\right)=\theta$ เมื่อ $\hat{\theta}_1=\frac{\hat{\theta}}{\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{\sigma^2}{n\mu^2}\right)^k\right]}=\frac{\hat{\theta}}{c_1}$ เมื่อ $c_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{\sigma^2}{n\mu^2}\right)^k$ ดังนั้นจะได้ว่า $\hat{\theta}_1$ ตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ

ในการหาค่าความแปรปรวน จะหาได้จากจากบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรกที่ 1

จากทฤษฎีบทที่ 1 ได้ว่า $V\left(\hat{\theta}\right)\approx\frac{\theta^2\tau^2}{n}$ (Wongkhao et al., 2013)

จากบทแทรกที่ 1 นำมาปรับใช้กับกรณีประมาณค่าแบบช่วงสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ได้ดังนี้ จาก $V\left(\hat{\theta}\right)\approx\frac{\theta^2\tau^2}{n}$ ซึ่งเมื่อแทนค่า τ ด้วย $\frac{\sigma}{\mu}$ จะได้ว่า $V\left(\hat{\theta}\right)\approx\frac{\theta^2\sigma^2}{n\mu^2}=\frac{\sigma^2}{n\mu^4}$

เนื่องจาก ในกรณีที่เราศึกษาเป็นการประมาณค่าแบบช่วงของส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรที่มีการแจกแจงแบบปรกติ เมื่อทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร นั่นคือจะเป็นกรณีที่ทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร แต่ไม่ทราบค่าเฉลี่ยประชากร ดังนั้นจึงต้องทำการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร μ ด้วย $\bar{X}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$E\left(\hat{\hat{\theta}}_1\right)=\theta$ เมื่อ $\hat{\hat{\theta}}_1=\frac{\hat{\theta}}{\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^2}\right)^k\right]}=\frac{\hat{\theta}}{d_1}$ และ $\hat{V}\left(\hat{\theta}\right)\approx\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^4}$ เมื่อ $d_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^2}\right)^k$

จากทฤษฎีขีดจำกัดส่วนกลาง จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของ $\frac{1}{\mu}$ ดังนี้

$$CI_{\theta_1}=\left[\frac{1}{d_1\bar{X}}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^4}},\frac{1}{d_1\bar{X}}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^4}}\right] \quad (1)$$

เช่นเดียวกันกับช่วงความเชื่อมั่นแบบที่ (1) จะทำการสร้างช่วงความเชื่อมั่นอีกช่วงที่ปรับมาจากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2

กำหนดให้ $X_1,X_2,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มมาจากประชากรปรกติ โดยมีค่าเฉลี่ยประชากร μ และ ความแปรปรวน σ^2 และตัวประมาณของพารามิเตอร์ θ ที่สนใจ คือ $\hat{\theta}=\frac{1}{\bar{X}}$ เมื่อ $\bar{X}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$ แล้ว ค่าคาดหวังและความแปรปรวนโดยประมาณของ $\hat{\theta}$ คือ

$$E\left(\hat{\theta}\right)\approx\theta\left[1+\frac{\tau^2}{n}\right] \text{ และ } V\left(\hat{\theta}\right)\approx\frac{\theta^2\tau^2}{n}$$

เมื่อ ทราบค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน τ (Panichkitkosolkul, 2017)

จากทฤษฎีบทที่ 2 นำมาปรับใช้กับกรณีประมาณค่าแบบช่วงสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ได้ดังนี้ จาก $E\left(\hat{\theta}\right)\approx\theta\left[1+\frac{\tau^2}{n}\right]$ เมื่อแทนค่า $\tau=\frac{\sigma}{\mu}$ แล้วจะได้ว่า $E\left(\hat{\theta}\right)\approx\theta\left[1+\frac{\sigma^2}{n\mu^2}\right]$ ซึ่งพบว่า $\hat{\theta}$ เป็นตัวประมาณเอนเอียงเชิงเส้นกำกับ ของ θ กล่าวคือ ตัวประมาณนี้จะเป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียง ที่ขนาดตัวอย่างมีค่าลู่เข้าสู่อนันต์ จึงต้องปรับให้ตัวประมาณดังกล่าวเป็นตัวประมาณไม่เอนเอียง (Unbiased estimator) ดังนี้ $E\left(\frac{\hat{\theta}}{\left[1+\frac{\sigma^2}{n\mu^2}\right]}\right)\approx\theta$ หรือ $E\left(\hat{\theta}_2\right)=\theta$ เมื่อ $\hat{\theta}_2=\frac{\hat{\theta}}{\left[1+\frac{\sigma^2}{n\mu^2}\right]}=\frac{\hat{\theta}}{c_2}$ เมื่อ $c_2=1+\frac{\sigma^2}{n\mu^2}$

ดังนั้นจะได้ว่า $\hat{\theta}_2$ ตัวประมาณไม่เอนเอียงของ θ

จากทฤษฎีบทที่ 2 นำมาปรับใช้กับกรณีประมาณค่าแบบช่วงสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ได้ดังนี้ จาก $V\left(\hat{\theta}\right)\approx\frac{\theta^2\tau^2}{n}$ ซึ่งเมื่อแทนค่า τ ด้วย $\frac{\sigma}{\mu}$ จะได้ว่า $V\left(\hat{\theta}\right)\approx\frac{\theta^2\sigma^2}{n\mu^2}=\frac{\sigma^2}{n\mu^4}$

เนื่องจาก ในกรณีที่เราศึกษาเป็นการประมาณค่าแบบช่วงของส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรที่มีการแจกแจงแบบปรกติ เมื่อทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร นั่นคือจะเป็นกรณีที่ทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร แต่ไม่ทราบค่าเฉลี่ยประชากร ดังนั้นจึงต้องทำการประมาณค่าเฉลี่ยประชากร μ ด้วย $\bar{X}$ ดังนั้นจะได้ว่า $E\left(\hat{\hat{\theta}}_2\right)=\theta$ เมื่อ $\hat{\hat{\theta}}_2=\frac{\hat{\theta}}{\left[1+\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^2}\right]}=\frac{\hat{\theta}}{d_2}$ และ $\hat{V}\left(\hat{\theta}\right)\approx\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^4}$ เมื่อ $d_2=1+\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^2}$

จากทฤษฎีขีดจำกัดส่วนกลาง จะได้ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของ $\frac{1}{\mu}$ ดังนี้

$$CI_{\theta_2}=\left[\frac{1}{d_2\bar{X}}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^4}},\frac{1}{d_2\bar{X}}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^4}}\right] \tag{2}$$

การประมาณค่าแบบช่วงสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากร $\left(1/\mu\right)$ กรณีข้อมูลปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต

ในงานวิจัยของ Wang (2008) และ Niwitpong (2013) ได้เสนอการหาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยประชากร กรณีปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต ดังนี้ กำหนดให้ m_1 คือ ขอบล่างของปริภูมิพารามิเตอร์ และ m_2 คือ ขอบบนของปริภูมิพารามิเตอร์ ซึ่งพารามิเตอร์ในที่นี้คือค่าเฉลี่ยประชากร (μ) ดังนั้นจะได้ว่าขอบเขตของปริภูมิพารามิเตอร์ คือ $\mu\in[m_1,m_2]$ สมมติให้ β คือ พารามิเตอร์ที่สนใจศึกษา จะได้ว่า $\mu\in\left[L_\beta,U_\beta\right]$ คือ ช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ β โดยที่ L_β และ U_β คือ ขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่นดังกล่าว ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับ β เมื่อพารามิเตอร์มีขอบเขต คือ $CI_\beta=\left[\max\left(m_1,L_\beta\right),\min\left(m_2,U_\beta\right)\right]$ ซึ่งช่วง CI_β ที่เป็นไปได้เป็นไปได้มี 4 กรณี คือ 1) ถ้า $m_1>L_\beta$ และ $m_2>U_\beta$ แล้ว $CI_\beta=\left[m_1,U_\beta\right]$, 2) ถ้า $m_1>L_\beta$ และ

$m_2 < U_\beta$ แล้ว $CI_\beta = [m_1, m_2]$, 3) ถ้า $m_1 < L_\beta$ และ $m_2 > U_\beta$ แล้ว $CI_\beta = [L_\beta, U_\beta]$ และ 4) ถ้า $m_1 < L_\beta$ และ $m_2 < U_\beta$ แล้ว $CI_\beta = [L_\beta, m_2]$

เนื่องจากในกรณีที่พารามิเตอร์คือค่าเฉลี่ยประชากร จะได้ว่ามีขอบเขตของปริภูมิพารามิเตอร์ $\mu \in [m_1, m_2]$ ดังนั้นสำหรับกรณีพารามิเตอร์คือส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากร จะได้ว่ามีขอบเขตของปริภูมิพารามิเตอร์ $1/\mu \in [m_2^{-1}, m_1^{-1}]$

จากในงานวิจัยของ Wang (2008) และ Niwitpong (2013) นำหลักการดังกล่าวมาประยุกต์ใช้กับกรณีขอบเขตของปริภูมิพารามิเตอร์ $1/\mu \in [m_2^{-1}, m_1^{-1}]$ จะได้ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากร เมื่อพารามิเตอร์มีขอบเขต คือ

$$CI_\theta = \left[\max\left(m_2^{-1}, L_\theta\right), \min\left(m_1^{-1}, U_\theta\right)\right]$$

โดยที่ L_θ คือ ขีดจำกัดล่างของช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ θ

U_θ คือ ขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของพารามิเตอร์ θ

จากช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของ $\frac{1}{\mu}$ แบบที่ (1) จะได้

$$CI_{\theta_3} = \left[\max\left(m_2^{-1}, \frac{1}{d_1\bar{X}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^4}}\right), \min\left(m_1^{-1}, \frac{1}{d_1\bar{X}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^4}}\right)\right] \quad (3)$$

จากช่วงความเชื่อมั่น $100(1-\alpha)\%$ ของ $\frac{1}{\mu}$ แบบที่ (2) จะได้

$$CI_{\theta_4} = \left[\max\left(m_2^{-1}, \frac{1}{d_2\bar{X}} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^4}}\right), \min\left(m_1^{-1}, \frac{1}{d_2\bar{X}} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n\bar{X}^4}}\right)\right] \quad (4)$$

เกณฑ์ที่ใช้พิจารณาค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม

การทดสอบว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จะมีค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม (CP) เท่ากับ 0.95 หรือไม่นั้น พิจารณาจากทดสอบสมมติฐาน $H_0 : CP \ge 0.95$ ซึ่งในที่นี้ กำหนดระดับนัยสำคัญเท่ากับ 0.05 หากค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมจากการจำลองมอนติคาร์โลมากกว่าหรือเท่ากับ $0.95 - z_{0.95}\sqrt{0.95(0.05)/10000} \approx 0.9464$ เมื่อ $z_{0.95} = 1.645$ แสดงว่าช่วงความเชื่อมั่นนั้นมีประสิทธิภาพ (Rohde C.A., 2014)

ผลการวิจัย

ในส่วนของการแสดงผลการวิจัยนี้ จะแสดงผลในรูปแบบตาราง โดยกำหนดสัญลักษณะต่างๆ ดังนี้

CP_1, CP_2, CP_3 และ CP_4 หมายถึง ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมของช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1}, CI_{θ_2}, CI_{θ_3} และ CI_{θ_4} ตามลำดับ

EL_1, EL_2, EL_3 และ EL_4 หมายถึง ค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1}, CI_{θ_2}, CI_{θ_3} และ CI_{θ_4} ตามลำดับ

________ หมายถึง ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่มีค่าน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด

จากตารางที่ 1 พบว่า ในกรณีขนาดตัวอย่าง $n = 10$ และ $n = 20$ ช่วงความเชื่อมั่นทุกช่วงจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในกรณีค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน $\tau = 0.30, 0.40, 0.50$ และ $\tau = 0.20, 0.40, 0.50$ ตามลำดับ ในกรณีขนาดตัวอย่าง $n = 30$, $n = 50$ และ $n = 100$ ช่วงความเชื่อมั่นทุกช่วงจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกกรณีของค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ช่วง

ความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_3} จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่เหมือนกัน เช่นเดียวกันกับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_2} และช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_4} โดยส่วนใหญ่ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_2} และ CI_{θ_4} จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่มากกว่าหรือเท่ากับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_3} นอกจากนี้ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_3} และ CI_{θ_4} จะให้ค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยกว่าหรือเท่ากับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_2} และค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีแนวโน้มลดลงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นและมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 1 ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม และค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เมื่อ พารามิเตอร์ $\mu = 5$

$1/\mu = 0.2$	τ	**Coverage Probability**				**Expected Length**			
		CP_1	CP_2	CP_3	CP_4	EL_1	EL_2	EL_3	EL_4
	0.05	0.9527	0.9527	0.9527	0.9527	0.0124	0.0124	0.0124	0.0124
	0.10	0.9490	0.9490	0.9490	0.9490	0.0249	0.0249	0.0241	0.0241
	0.15	0.9485	0.9485	0.9485	0.9485	0.0375	0.0375	0.0311	0.0311
$n = 10$	0.20	0.9479	0.9480	0.9479	0.9480	0.0501	0.0501	0.0341	0.0341
	0.30	0.9461	0.9463	0.9461	0.9463	0.0765	0.0765	0.0365	0.0365
	0.40	0.9017	0.9357	0.9017	0.9357	0.1042	0.1042	0.0370	0.0372
	0.50	0.5023	0.9312	0.5023	0.9312	0.1359	0.1359	0.0338	0.0374
	0.05	0.9535	0.9535	0.9535	0.9535	0.0088	0.0088	0.0088	0.0088
	0.10	0.9464	0.9464	0.9464	0.9464	0.0175	0.0175	0.0175	0.0175
	0.15	0.9534	0.9534	0.9534	0.9534	0.0264	0.0264	0.0253	0.0253
$n = 20$	0.20	0.9459	0.9459	0.9459	0.9459	0.0353	0.0353	0.0302	0.0302
	0.30	0.9484	0.9484	0.9484	0.9484	0.0534	0.0534	0.0346	0.0346
	0.40	0.9442	0.9441	0.9442	0.9441	0.0719	0.0719	0.0361	0.0361
	0.50	0.9413	0.9433	0.9413	0.9433	0.0914	0.0914	0.0371	0.0371
	0.05	0.9512	0.9512	0.9512	0.9512	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072
	0.10	0.9495	0.9495	0.9495	0.9495	0.0143	0.0143	0.0143	0.0143
	0.15	0.9494	0.9494	0.9494	0.9494	0.0215	0.0215	0.0213	0.0213
$n = 30$	0.20	0.9515	0.9515	0.9515	0.9515	0.0287	0.0287	0.0269	0.0269
	0.30	0.9472	0.9472	0.9472	0.9472	0.0433	0.0433	0.0328	0.0328
	0.40	0.9492	0.9491	0.9492	0.9491	0.0581	0.0581	0.0352	0.0352
	0.50	0.9473	0.9473	0.9473	0.9473	0.0734	0.0734	0.0363	0.0363
	0.05	0.9501	0.9501	0.9501	0.9501	0.0055	0.0055	0.0055	0.0055
	0.10	0.9488	0.9488	0.9488	0.9488	0.0111	0.0111	0.0111	0.0111
	0.15	0.9466	0.9466	0.9466	0.9466	0.0166	0.0166	0.0166	0.0166
$n = 50$	0.20	0.9524	0.9524	0.9524	0.9524	0.0222	0.0222	0.0222	0.0222
	0.30	0.9510	0.9510	0.9510	0.9510	0.0334	0.0334	0.0294	0.0294
	0.40	0.9482	0.9482	0.9482	0.9482	0.0448	0.0448	0.0331	0.0331
	0.50	0.9510	0.9512	0.9510	0.9512	0.0563	0.0563	0.0349	0.0349
	0.05	0.9493	0.9493	0.9493	0.9493	0.0039	0.0039	0.0039	0.0039
	0.10	0.9512	0.9512	0.9512	0.9512	0.0078	0.0078	0.0078	0.0078
	0.15	0.9494	0.9494	0.9494	0.9494	0.0118	0.0118	0.0118	0.0118
$n = 100$	0.20	0.9498	0.9498	0.9498	0.9498	0.0157	0.0157	0.0157	0.0157
	0.30	0.9465	0.9465	0.9465	0.9465	0.0236	0.0236	0.0231	0.0231
	0.40	0.9473	0.9473	0.9473	0.9473	0.0315	0.0315	0.0284	0.0284
	0.50	0.9478	0.9478	0.9478	0.9478	0.0395	0.0395	0.0318	0.0318

จากตารางที่ 2 พบว่า ในกรณีขนาดตัวอย่าง $n = 10$, $n = 20$ และ $n = 30$ ช่วงความเชื่อมั่นทุกช่วงจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในกรณีค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน $\tau = 0.40, 0.50$, $\tau = 0.50$ และ $\tau = 0.40$ ตามลำดับ ในกรณีขนาดตัวอย่าง $n = 50$ และ $n = 100$ จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมไม่

น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกกรณีของค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_3} จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่เหมือนกัน เช่นเดียวกันกับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_2} และ CI_{θ_4} โดยส่วนใหญ่ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_2} และ CI_{θ_4} จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่มากกว่าหรือเท่ากับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_3} นอกจากนี้ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_3} และ CI_{θ_4} จะให้ค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยกว่าหรือเท่ากับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_2} และค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีแนวโน้มลดลงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นและมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 2 ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม และค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เมื่อ พารามิเตอร์ $\mu = 1$

$1/\mu = 1$	τ	**Coverage Probability**				**Expected Length**			
		CP_1	CP_2	CP_3	CP_4	EL_1	EL_2	EL_3	EL_4
	0.05	0.9506	0.9506	0.9506	0.9506	0.0620	0.0620	0.0620	0.0620
	0.10	0.9488	0.9489	0.9488	0.9489	0.1243	0.1243	0.1206	0.1206
	0.15	0.9506	0.9507	0.9506	0.9507	0.1872	0.1872	0.1558	0.1558
$n = 10$	0.20	0.9501	0.9501	0.9501	0.9501	0.2508	0.2508	0.1697	0.1697
	0.30	0.9473	0.9476	0.9473	0.9476	0.3827	0.3827	0.1824	0.1824
	0.40	0.9070	0.9441	0.9070	0.9441	0.5217	0.5217	0.1848	0.1858
	0.50	0.5099	0.9339	0.5099	0.9339	0.6726	0.6726	0.1702	0.1866
	0.05	0.9520	0.9520	0.9520	0.9520	0.0438	0.0438	0.0438	0.0438
	0.10	0.9502	0.9502	0.9502	0.9502	0.0877	0.0877	0.0876	0.0876
	0.15	0.9492	0.9492	0.9492	0.9492	0.1318	0.1318	0.1264	0.1264
$n = 20$	0.20	0.9532	0.9532	0.9532	0.9532	0.1764	0.1764	0.1513	0.1513
	0.30	0.9479	0.9479	0.9479	0.9479	0.2666	0.2666	0.1727	0.1727
	0.40	0.9501	0.9501	0.9501	0.9501	0.3591	0.3591	0.1810	0.1810
	0.50	0.9376	0.9394	0.9376	0.9394	0.4566	0.4566	0.1851	0.1850
	0.05	0.9498	0.9498	0.9498	0.9498	0.0358	0.0358	0.0358	0.0358
	0.10	0.9505	0.9505	0.9505	0.9505	0.0716	0.0716	0.0716	0.0716
	0.15	0.9497	0.9497	0.9497	0.9497	0.1074	0.1074	0.1064	0.1064
$n = 30$	0.20	0.9478	0.9478	0.9478	0.9478	0.1436	0.1436	0.1343	0.1343
	0.30	0.9500	0.9501	0.9500	0.9501	0.2167	0.2167	0.1640	0.1640
	0.40	0.9456	0.9455	0.9456	0.9455	0.2909	0.2909	0.1757	0.1757
	0.50	0.9483	0.9484	0.9483	0.9484	0.3672	0.3672	0.1815	0.1815
	0.05	0.9549	0.9549	0.9549	0.9549	0.0277	0.0277	0.0277	0.0277
	0.10	0.9505	0.9505	0.9505	0.9505	0.0555	0.0555	0.0555	0.0555
	0.15	0.9473	0.9473	0.9473	0.9473	0.0833	0.0833	0.0832	0.0832
$n = 50$	0.20	0.9519	0.9519	0.9519	0.9519	0.1111	0.1111	0.1097	0.1097
	0.30	0.9473	0.9473	0.9473	0.9473	0.1673	0.1673	0.1473	0.1473
	0.40	0.9474	0.9474	0.9474	0.9474	0.2236	0.2236	0.1655	0.1655
	0.50	0.9488	0.9488	0.9488	0.9488	0.2806	0.2806	0.1746	0.1746
	0.05	0.9521	0.9521	0.9521	0.9521	0.0196	0.0196	0.0196	0.0196
	0.10	0.9484	0.9484	0.9484	0.9484	0.0392	0.0392	0.0392	0.0392
	0.15	0.9508	0.9508	0.9508	0.9508	0.0588	0.0588	0.0588	0.0588
$n = 100$	0.20	0.9486	0.9486	0.9486	0.9486	0.0785	0.0785	0.0785	0.0785
	0.30	0.9485	0.9485	0.9485	0.9485	0.1179	0.1179	0.1155	0.1155
	0.40	0.9515	0.9515	0.9515	0.9515	0.1578	0.1578	0.1426	0.1426
	0.50	0.9495	0.9496	0.9495	0.9496	0.1976	0.1976	0.1587	0.1587

จากตารางที่ 3 พบว่า ในกรณีขนาดตัวอย่าง $n = 10$ และ $n = 20$ ช่วงความเชื่อมั่นทุกช่วงจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในกรณี $\tau = 0.30, 0.40, 0.50$ และ $\tau = 0.50$ ตามลำดับ ใน

กรณีขนาดตัวอย่าง $n=30$, $n=50$ และ $n=100$ จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกกรณีของค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_3} จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่เหมือนกัน เช่นเดียวกันกับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_2} และ CI_{θ_4} โดยส่วนใหญ่ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_2} และ CI_{θ_4} จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่มากกว่าหรือเท่ากับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_3} นอกจากนี้ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_3} และ CI_{θ_4} จะให้ค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยกว่าหรือเท่ากับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_2} และค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีแนวโน้มลดลงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นและมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 3 ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวม และค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่น เมื่อ พารามิเตอร์ $\mu=1/5$

$1/\mu=5$	τ	**Coverage Probability**				**Expected Length**			
		CP_1	CP_2	CP_3	CP_4	EL_1	EL_2	EL_3	EL_4
	0.05	0.9475	0.9475	0.9475	0.9475	0.3102	0.3102	0.3102	0.3102
	0.10	0.9492	0.9492	0.9492	0.9492	0.6211	0.6211	0.6020	0.6020
	0.15	0.9497	0.9497	0.9497	0.9497	0.9372	0.9372	0.7769	0.7769
$n=10$	0.20	0.9472	0.9472	0.9472	0.9472	1.2497	1.2497	0.8516	0.8516
	0.30	0.9444	0.9445	0.9444	0.9445	1.9062	1.9062	0.9088	0.9088
	0.40	0.9052	0.9428	0.9052	0.9428	2.6054	2.6054	0.9238	0.9288
	0.50	0.5021	0.9322	0.5021	0.9322	3.3631	3.3631	0.8548	0.9359
	0.05	0.9501	0.9501	0.9501	0.9501	0.2192	0.2192	0.2192	0.2192
	0.10	0.9510	0.9510	0.9510	0.9510	0.4391	0.4391	0.4386	0.4386
	0.15	0.9491	0.9491	0.9491	0.9491	0.6602	0.6602	0.6337	0.6337
$n=20$	0.20	0.9492	0.9492	0.9492	0.9492	0.8818	0.8818	0.7570	0.7570
	0.30	0.9493	0.9491	0.9493	0.9491	1.3355	1.3355	0.8676	0.8676
	0.40	0.9483	0.9483	0.9483	0.9483	1.7961	1.7961	0.9042	0.9042
	0.50	0.9410	0.9423	0.9410	0.9423	2.2753	2.2753	0.9259	0.9254
	0.05	0.9481	0.9481	0.9481	0.9481	0.1790	0.1790	0.1790	0.1790
	0.10	0.9501	0.9501	0.9501	0.9501	0.3582	0.3582	0.3582	0.3582
	0.15	0.9494	0.9494	0.9494	0.9494	0.5380	0.5380	0.5331	0.5331
$n=30$	0.20	0.9495	0.9496	0.9495	0.9496	0.7195	0.7195	0.6744	0.6744
	0.30	0.9520	0.9519	0.9520	0.9519	1.0804	1.0804	0.8185	0.8185
	0.40	0.9467	0.9467	0.9467	0.9467	1.4551	1.4551	0.8806	0.8806
	0.50	0.9483	0.9483	0.9483	0.9483	1.8401	1.8401	0.9084	0.9085
	0.05	0.9493	0.9493	0.9493	0.9493	0.1386	0.1386	0.1386	0.1386
	0.10	0.9501	0.9501	0.9501	0.9501	0.2773	0.2773	0.2773	0.2773
	0.15	0.9547	0.9547	0.9547	0.9547	0.4161	0.4161	0.4160	0.4160
$n=50$	0.20	0.9487	0.9487	0.9487	0.9487	0.5559	0.5559	0.5493	0.5493
	0.30	0.9471	0.9471	0.9471	0.9471	0.8366	0.8366	0.7360	0.7360
	0.40	0.9513	0.9512	0.9513	0.9512	1.1194	1.1194	0.8269	0.8269
	0.50	0.9469	0.9469	0.9469	0.9469	1.4059	1.4059	0.8711	0.8711
	0.05	0.9499	0.9499	0.9499	0.9499	0.0980	0.0980	0.0980	0.0980
	0.10	0.9511	0.9511	0.9511	0.9511	0.1960	0.1960	0.1960	0.1960
	0.15	0.9543	0.9543	0.9543	0.9543	0.2942	0.2942	0.2942	0.2942
$n=100$	0.20	0.9523	0.9523	0.9523	0.9523	0.3926	0.3926	0.3925	0.3925
	0.30	0.9513	0.9513	0.9513	0.9513	0.5893	0.5893	0.5774	0.5774
	0.40	0.9511	0.9511	0.9511	0.9511	0.7877	0.7877	0.7114	0.7114
	0.50	0.9515	0.9515	0.9515	0.9515	0.9866	0.9866	0.7914	0.7914

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

ช่วงความเชื่อมั่นสำหรับส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากร เมื่อทราบค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็ก ๆ ช่วงความเชื่อมั่นจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่ามาก กล่าวคือ กรณีของพารามิเตอร์ $\mu = 5$ ช่วงความเชื่อมั่นจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน $\tau = 0.30 - 0.50$ กรณีของพารามิเตอร์ $\mu = 1$ ช่วงความเชื่อมั่นจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน $\tau = 0.40 - 0.50$ กรณีของพารามิเตอร์ $\mu = 1/5$ ช่วงความเชื่อมั่นจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมน้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน $\tau = 0.30 - 0.50$ และเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น ทุกช่วงความเชื่อมั่นจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่ไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดในทุกกรณีของค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน นอกจากนี้ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_3} จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่เหมือนกันเช่นเดียวกันกับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_2} และ CI_{θ_4} โดยส่วนใหญ่ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_2} และ CI_{θ_4} จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมที่มากกว่าหรือเท่ากับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_3} นอกจากนั้นสำหรับทุกกรณีของพารามิเตอร์ $\mu = 5$, $\mu = 1$ และ $\mu = 1/5$ ช่วงความเชื่อมั่นเชื่อมั่น CI_{θ_3} และ CI_{θ_4} จะให้ค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นน้อยกว่าหรือเท่ากับช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_1} และ CI_{θ_2} และในทุช่วงความเชื่อมั่น ค่าความยาวโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นมีแนวโน้มลดลงเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นและมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่อค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันมีค่าเพิ่มขึ้น จากผลการวิจัย สรุปได้ว่า ช่วงความเชื่อมั่น CI_{θ_4} เป็นช่วงที่เหมาะสมที่สุดในการใช้ประมาณค่าส่วนกลับของค่าเฉลี่ยประชากรปรกติ เมื่อทราบส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของประชากร และปริภูมิพารามิเตอร์มีขอบเขต ช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์เชื่อมั่นที่กำหนด และช่วงความเชื่อมั่นที่ให้ค่าความยาวโดยเฉลี่ยสั้นที่สุดแสดงด้วยตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมไม่น้อยกว่าค่าสัมประสิทธิ์เชื่อมั่นที่กำหนด และค่าความยาวโดยเฉลี่ยสั้นที่สุด

n	τ	μ	$CP \geq 0.9464$	$\min(EL)$
$n = 10$	$0.05 - 0.20$	$\mu = 5,\ \mu = 1/5$	ทุกวิธี	EL_3, EL_4
	$0.05 - 0.30$	$\mu = 1$	ทุกวิธี	EL_3, EL_4
$n = 20$	$0.05 - 0.15, 0.30$	$\mu = 5$	ทุกวิธี	EL_3, EL_4
	$0.05 - 0.40$	$\mu = 1,\ \mu = 1/5$	ทุกวิธี	EL_3, EL_4
$n = 30$	$0.05 - 0.30, 0.50$	$\mu = 1$	ทุกวิธี	EL_3, EL_4
	$0.05 - 0.50$	$\mu = 5,\ \mu = 1/5$	ทุกวิธี	EL_3, EL_4
$n = 50$	$0.05 - 0.50$	$\mu = 5,\ \mu = 1,\ \mu = 1/5$	ทุกวิธี	EL_3, EL_4
$n = 100$	$0.05 - 0.50$	$\mu = 5,\ \mu = 1,\ \mu = 1/5$	ทุกวิธี	EL_3, EL_4

หมายเหตุ $\min(EL)$ หมายถึง ค่าความยาวโดยเฉลี่ยสั้นที่สุด

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากความช่วยเหลือของคณาจารย์และเจ้าหน้าที่สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ รวมทั้งครอบครัวที่คอยให้การสนับสนุนในทุกๆ เรื่องตลอดการทำงานวิจัย สุดท้ายนี้เพื่อนๆทุกคนที่คอยให้กำลังใจจนกระทั่งงานวิจัยเล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

เอกสารอ้างอิง

Lamanna E, Romano G, Sgarbi C. Curvature measurements in nuclear emulsions. Nuclear Instruments and Methods, 387-391; 1981.

Mandelkern M. Setting confidence intervals for bounded parameters. Statistical Science, Vol.17, No.2, 149-172; 2002.

Panichkitkosolkul W. Confidence intervals for the reciprocal of a normal mean with a known coefficient of variation and restricted parameter space. Pakistan Journal of Statistics and Operation Research. Vol.13, No.2; 2017.

Pratt JW. Shorter confidence intervals for the mean of a normal distribution with known variance. The Annals of Mathematical Statistics, Vol.34, No.2, 574-586; 1963.

Rohde CA, Introductory Statistical Inference with the Likelihood Function, 1st ed. London: Springer; 2014.

Stein C, Wald A. Sequential confidence intervals for the mean of a normal distribution with known variance. The Annals of Mathematical Statistics, Vol.18, No.3, 427-433; 1947.

Wang H. Confidence intervals for the mean of a normal distribution with restricted parameter space. Journal of Statistical Computation and Simulation, Vol.78, No.9, 829-841; 2008.

Wolfowitz J. Minimax estimates of the mean of a normal distribution with known variance. The Annals of Mathematical Statistics, Vol.20, No.2, 218-230; 1950.

Wongkhao et al. Confidence interval for the inverse of a normal mean with a known coefficient of variation. International Journal of Mathematical, Computational, Statistical, Natural and Physical Engineering, Vol.7, No.9; 2013.