PMO26

การใช้ภาวะน่าจะเป็นแบบโปรไฟล์ที่มีการแปลงพารามิเตอร์เพื่อสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์สำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน

Using Re-Parametrized Profile Likelihoods to Construct Wald Confidence Intervals for the Mean of Inverse Gaussian Distribution

อุไซนา นิยมเดชา (Ausaina Niyomdecha)* ดร.พัทธ์ชนก ศรีสุรเดชชัย (Dr.Patchanok Srisuradetchai)**

บทคัดย่อ

การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนถูกนำมาประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้และข้อมูลอายุการใช้งาน ในงานวิจัยนี้เสนอช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ซึ่งเป็นวิธีที่นิยมใช้กันในปัจจุบันเพราะมีแนวโน้มที่จะได้สูตรอย่างง่าย เพื่อประมาณค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนในกรณีที่ไม่ทราบพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง เนื่องจากช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์จะมีประสิทธิภาพเมื่อฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์มีลักษณะสมมาตร ดังนั้นจึงมีการแปลงพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยเพื่อปรับฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ให้สมมาตร และใช้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์เพื่อกำจัดพารามิเตอร์รูปร่างดังกล่าว อย่างไรก็ตาม มีตัวอย่างบางชุดที่ไม่สามารถนำมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นนี้ได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ทำการการศึกษาเงื่อนไขสำหรับตัวอย่างสุ่มที่สามารถนำมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้ จากผลการศึกษาเชิงจำลองพบว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ได้ มีค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมใกล้เคียงกับสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด เมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่

ABSTRACT

The inverse Gaussian distribution is widely applied in reliability analysis and lifetime data. This study proposes confidence interval for estimating the mean of the inverse Gaussian distribution with an unknown shape parameter. Wald confidence interval is the most commonly used method because it tends to obtain a simple formula. However, it is effective when the relative likelihood is symmetric. Reparameterization of the likelihood function in term of new parameter will make the relative likelihood symmetric and profile likelihood is used as the method to eliminate the shape parameter. In addition, there are some samples that cannot be built in this interval. Therefore, we will study the condition of the random samples that can be used to construct this confidence interval. For the simulation study, when the sample size is large, the coverage probability of Wald interval is close to the confidence coefficient defined in the study.

คำสำคัญ: ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ การแปลงพารามิเตอร์ ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์

Keywords: Wald confidence interval, Reparameterization, Profile likelihood

** นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์*

*** ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์*

บทนำ

การสร้างช่วงความเชื่อมั่นถูกเสนอครั้งแรกโดย Neyman (1937) โดยมีแนวคิดว่าช่วงความเชื่อมั่นที่ได้จะขึ้นอยู่กับหลักการสุ่มตัวอย่างซ้ำ (Repeated Sampling Principle) นั่นคือกระบวนการสร้างช่วงความเชื่อมั่นจะอยู่บนพื้นฐานของการทดลองซ้ำภายใต้เงื่อนไขเดิม ซึ่งเรียกแนวคิดนี้ว่า Frequentist (Pawitan, 2013) ในขณะที่แนวคิดแบบเบส์ (Bayesian) ไม่ได้อ้างอิงหลักการสุ่ม แต่มองว่าพารามิเตอร์ที่สนใจนั้นมีการแจกแจงก่อน (Prior Distribution) และใช้การแจกแจงภายหลัง (Posterior Probability Distribution) ในการอนุมาน (Gelman et al., 2014) และแนวคิดสุดท้ายคือแนวคิดแบบ Fisherian ซึ่งการอนุมานเชิงสถิติจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) เท่านั้น (Fisher, 1973) ในงานวิจัยนี้สนใจศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน โดยใช้ทั้งแนวคิดของ Frequentist และ Fisherian

การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนเป็นการแจกแจงในวงศ์ชี้กำลัง (Exponential Family) ซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นคือ

$$f(x;\mu,\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}\exp\left(\frac{-\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right)$$

โดยที่ $x>0$, $\mu>0$ และ $\lambda>0$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $X\sim IG(\mu,\lambda)$ โดยที่ μ เป็นพารามิเตอร์แสดงตำแหน่ง (Location Parameter) หรือพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย และ λ เป็นพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง (Shape Parameter) ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงคือ $E(X)=\mu$ และ $Var(X)=\mu^3/\lambda$ ตามลำดับ และมีความเบ้เท่ากับ $3\sqrt{\mu/\lambda}$ ตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ μ และ λ คือ $\hat{\mu}=\bar{X}$ และ $\hat{\lambda}=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^{-1}/n-1/\bar{X}\right)^{-1}$ ตามลำดับ โดยที่ $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}X_i/n$ (Folks, Chhikara, 1978)

สำหรับแนวคิดการอนุมานแบบ Fisherian นั้น Fisher (1973) ได้เสนอช่วงภาวะน่าจะเป็น (Likelihood-Based Interval) ของพารามิเตอร์ θ ดังนี้

$$\left\{\theta\left|\frac{L(\theta)}{\max L(\theta)}\geq c\right.\right\}=\left\{\theta\left|\frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})}\geq c\right.\right\} \tag{1}$$

โดยที่ $L(\theta)$ คือฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ θ และ $L(\hat{\theta})$ คือค่าสูงสุดของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของ θ เมื่อ θ มีค่าเท่ากับค่าประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\theta}$ ส่วนค่า c จะอาศัยการแจกแจงเชิงเส้นกำกับ (Asymptotic Distribution) คือตัวสถิติอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นของ Wilk (1938) ซึ่งมีการแจกแจงโดยประมาณแบบไคกำลังสองและมีการแจกแจงไคกำลังสองที่แท้จริงเมื่อตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงปรกติ ดังนั้นจะได้ช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)$ 100% ที่ใช้ภาวะน่าจะเป็นคือ

$$\left\{\theta\left|\frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta}_{ML})}\geq \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)\right.\right\}$$

โดยที่ $\chi^2_{1,(1-\alpha)}$ แทนควอนไทล์ที่ $(1-\alpha)$ ของการแจกแจงไคกำลังสอง

สำหรับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนซึ่งมีพารามิเตอร์ 2 พารามิเตอร์คือพารามิเตอร์ μ และ λ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์สองพารามิเตอร์ ซึ่งเขียนแทนด้วย $L(\mu,\lambda)$ ในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ μ กรณีที่ทราบ μ Arefi et al. (2008) ได้เสนอช่วงความเชื่อมั่น 3 แบบ ได้แก่ 1) ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ (Wald Interval) ซึ่งมีสูตรอย่างง่ายคือ $\hat{\mu}\pm z_{1-\alpha/2}(n\lambda)^{-1/2}\hat{\mu}^{3/2}$ 2) ช่วงความเชื่อมั่นแบบสกอร์ (Score) ซึ่งได้จากการจัดรูปสมการ $-z_{1-\alpha/2}\le\sqrt{n\lambda}\left(\hat{\mu}-\mu\right)/\sqrt{\mu^3}\le z_{1-\alpha/2}$ และ 3) ช่วงความเชื่อมั่นอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Ratio Interval) คือ $\dfrac{n\lambda\hat{\mu}}{n\lambda+k\sqrt{n\lambda\hat{\mu}}}\le\mu\le\dfrac{n\lambda\hat{\mu}}{n\lambda-k\sqrt{n\lambda\hat{\mu}}}$ เมื่อ $k=\sqrt{\chi^2_{(1-\alpha),1}}$ และ $0<k<\sqrt{n\lambda/\hat{\mu}}$ สำหรับกรณีที่การแจกแจงมีพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าสองพารามิเตอร์คือ μ และ λ และต้องการสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบ Fisherian ของพารามิเตอร์ μ จำเป็นต้องกำจัดพารามิเตอร์ที่ไม่สนใจหรือพารามิเตอร์รบกวน (Nuisance Parameter) λ ก่อน ในที่นี้จะใช้วิธีฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (Profile Likelihood Function) เพื่อกำจัด λ

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ μ คือ $L(\mu)=\max\limits_{\lambda}L(\mu,\lambda)$ ได้จากการแทน λ ด้วย $\hat{\lambda}$ ที่เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ $L(\mu,\lambda)$ เมื่อกำหนดให้ μ เป็นค่าคงที่ เพื่อความชัดเจนจะให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แทนด้วย $L_p(\mu,\hat{\lambda})$ จะได้ช่วงความเชื่อมั่นภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของพารามิเตอร์ μ คือ

$$\left\{\mu\left|\frac{L_p(\mu,\hat{\lambda})}{\max L_p(\mu,\hat{\lambda})}\ge\exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)\right.\right\}\quad\text{หรือ}\quad\left\{\mu\left|\log\frac{L_p(\mu,\hat{\lambda})}{\max L_p(\mu,\hat{\lambda})}\ge-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right.\right\}\tag{2}$$

พัทธ์ชนก (2560ก) ได้พิสูจน์แล้วว่า $\max L_p(\mu,\hat{\lambda})$ มีค่าเท่ากับ $L_p(\hat{\mu},\hat{\lambda})$ นั่นคือสามารถแทน μ ด้วยตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดได้ และพัทธ์ชนก (2560ข) ได้ทำการศึกษาช่วงความเชื่อมั่นสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน กรณีที่ไม่ทราบพารามิเตอร์ทั้งสองตัวไว้ 2 แบบ คือ 1) ช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ (PL) โดยกำหนด ตัวอย่างสุ่มขนาด n ได้ช่วงความเชื่อมั่นในรูปอย่างง่ายคือ

$$\left[\frac{-n+\sqrt{n^2+Bn\bar{x}}}{B},\frac{-n-\sqrt{n^2+Bn\bar{x}}}{B}\right]\tag{3}$$

โดยที่ $B=\left(\dfrac{\hat{\mu}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{-1}-n}{\hat{\mu}\exp\left(-\chi^2_{1,(1-\alpha)}/n\right)}\right)-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{-1}$ และตัวอย่างสุ่มที่นำมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้ต้องมีคุณสมบัติ

$$\left(1-\frac{n}{\hat{\mu}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{-1}}\right)^{n/2}\le\exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)$$

และ 2) ช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณ (EL) ซึ่งมีสูตรในรูปอย่างง่ายคือ

$$\left[(A-B)/C,(A+B)/C\right]\tag{4}$$

โดยที่ $A = n\hat{\lambda}\hat{\mu}$, $B = \hat{\mu}\sqrt{n\hat{\lambda}\hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}}$, $C = n\hat{\lambda} - \hat{\mu}\chi^2_{1,(1-\alpha)}$ โดยตัวอย่างสุ่มที่นำมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้ต้องมีคุณสมบัติ

$$\exp\left[-\frac{n\hat{\lambda}}{2\hat{\mu}}\right] \le \exp\left(-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right)$$

ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์เป็นแนวคิดการอนุมานแบบ Frequentist ซึ่งถูกสร้างโดยทฤษฎีลิมิตเข้าสู่ศูนย์กลางภายใต้การแจกแจงปรกติ โดยมีตัวประมาณแบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\theta}$ เป็นค่าประมาณแบบจุดและมีค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (Standard Error) คือ $se(\hat{\theta}) = \sqrt{I^{-1}(\hat{\theta})}$ โดยที่ $I(\theta)$ คือฟิชเชอร์อินฟอเมชั่น (Fisher Information) ของ θ การสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ได้จากการประมาณลอการิทึมภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ด้วยฟังก์ชันกำลังสอง ดังนี้

$$\log\frac{L(\theta)}{L(\hat{\theta})} \approx -\frac{1}{2}I(\hat{\theta})(\theta-\hat{\theta})^2$$

จะได้

$$\left\{\theta \middle| -\frac{1}{2}I(\hat{\theta})(\theta-\hat{\theta})^2 \ge -\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right\} \tag{5}$$

หรือ

$$\left\{\theta \middle| I(\hat{\theta})(\theta-\hat{\theta})^2 \ge \left(z_{1-\alpha/2}\right)^2\right\}$$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์คือ $\hat{\theta} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{I^{-1}(\hat{\theta})}$ เมื่อ $z_{1-\alpha/2}$ แทนควอนไทล์ที่ $1-\alpha/2$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

การประมาณช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์จะมีประสิทธิภาพเทียบเท่าช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นเมื่อฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของการแจกแจงมีลักษณะสมมาตร (Pawitan, 2013) Díaz-Francés (2016) ได้ทำการศึกษาช่วงความเชื่อมั่นของ θ สำหรับการแจกแจงปัวซง การแจกแจงแบบเลขชี้กำลังและการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน กรณีที่การแจกแจงมีพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าหนึ่งตัว โดยการดัดแปลงฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นให้สมมาตร ด้วยวิธีการดัดแปลงพารามิเตอร์เดิมให้อยู่ในรูปของพารามิเตอร์ใหม่คือ $\theta = \varphi^{1/k}$ โดยที่ $\theta > 0$, $\varphi > 0$ และ $k \ne 0$ จะได้ลอการิทึมของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นคือ $l(\varphi)$ และลอการิทึมภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ (Log-Relative Likelihood) คือ $r(\varphi)$ โดยที่ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ φ คือ $\hat{\varphi} = \hat{\theta}^k$ และ k เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$\left.\frac{d^3 l(\varphi)}{d\varphi^3}\right|_{\varphi=\hat{\varphi}} = \left.\frac{d^3 r(\varphi)}{d\varphi^3}\right|_{\varphi=\hat{\varphi}} = 0 \quad \text{และ} \quad I(\hat{\varphi}) = k^{-2}I(\hat{\theta})\hat{\theta}^{\,2-2k}$$

สำหรับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบพารามิเตอร์ μ แต่ทราบ λ Díaz-Francés (2016) ได้เสนอรูปแบบการแปลงคือ $\varphi = \mu^{-1}$ และใช้รูปแบบการแปลงนี้สำหรับกรณีที่ไม่ทราบทั้งค่า μ และ λ เช่นกัน หลังจากทำการแปลงพารามิเตอร์แล้วจึงทำการกำจัดพารามิเตอร์รบกวนโดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และทำการหาช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นของ φ จากนั้นจึงทำการแปลงพารามิเตอร์กลับ จะได้ช่วงความเชื่อมั่นของ μ แบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ที่มีการแปลงพารามิเตอร์ (RPL) คือ

$$\left[\left(\hat{\varphi}+\frac{\sqrt{n(c^{-2/n}-1)}}{\sqrt{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}}\right)^{-1},\left(\hat{\varphi}-\frac{\sqrt{n(c^{-2/n}-1)}}{\sqrt{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}}\right)^{-1}\right] \tag{6}$$

โดยที่ $\hat{\varphi}=\hat{\mu}^{-1}=n/\sum_{i=1}^{n}x_i$ และกำหนด $c=0.1465$ ซึ่งจะให้ช่วงความเชื่อมั่นที่ 95% ของพารามิเตอร์ μ และช่วงที่ได้จะสมเหตุสมผลเมื่อ $n\geq 10$

เนื่องจากช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์เป็นวิธีที่รู้จักและนิยมใช้กันแพร่หลายในปัจจุบันเพราะง่ายต่อการคำนวณ ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาการใช้ภาวะน่าจะเป็นแบบโปรไฟล์ที่มีการแปลงพารามิเตอร์เพื่อสร้างช่วงเชื่อมั่นแบบวัลด์สำหรับพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน พร้อมทั้งเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวม (Coverage Probability) และความยาวช่วงโดยเฉลี่ย(Average Length) ของช่วงความเชื่อมั่นที่นำเสนอนี้กับช่วงความเชื่อมั่นแบบ PL, EL และ RPL โดยใช้การจำลองมอนติคาร์โล

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อสร้างสูตรสำหรับช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ของพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นแบบโปรไฟล์ที่มีการแปลงพารามิเตอร์(WRPL)
2. ศึกษาเงื่อนไขของตัวอย่างที่สามารถนำมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้
3. เปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมและความยาวช่วงโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่นำเสนอนี้กับช่วงความเชื่อมั่นแบบ PL, EL และ RPL

วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้สนใจศึกษาการใช้ภาวะน่าจะเป็นแบบโปรไฟล์ที่มีการแปลงพารามิเตอร์เพื่อสร้างช่วงเชื่อมั่นแบบวัลด์สำหรับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนในเชิงทฤษฎีและมีการจำลองตัวอย่างสุ่มพร้อมทั้งศึกษาเงื่อนไขของตัวอย่างสุ่มที่สามารถนำมาสร้างช่วงด้วย โดยมีขั้นตอนการศึกษาดังนี้

1) ทบทวนวรรณกรรมเกี่ยวกับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน การสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ การกำจัดพารามิเตอร์รบกวนโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ และการดัดแปลงพารามิเตอร์เพื่อทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสมมาตร

2) หาสูตรอย่างง่ายสำหรับช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ กรณีที่มีการดัดแปลงพารามิเตอร์ $\mu=\varphi^{-1}$ และกำจัดพารามิเตอร์รบกวนด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์

3) ศึกษาเงื่อนไขของตัวอย่างสุ่มที่สามารถนำมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้

4) ทำการศึกษาโดยการจำลองเพื่อเปรียบเทียบค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมและความยาวช่วงโดยเฉลี่ยของช่วงความเชื่อมั่นที่นำเสนอกับช่วงความเชื่อมั่นแบบ PL, EL และ RPL โดยประชากรมีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนที่มีขนาด $n=5,10,15,30,45,60,100$ มีพารามิเตอร์ $\mu=1,3,7$ และ $\lambda=0.5,1,3$

ผลการวิจัย

ผลการศึกษาในทางคณิตศาสตร์

สูตรอย่างง่ายสำหรับช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ของ μ ของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน กรณีที่ไม่ทราบทั้งพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ และพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง λ โดยมีการแปลงพารามิเตอร์ $\mu=\varphi^{-1}$ เพื่อปรับภาวะน่าจะ

เป็นสัมพัทธ์ (Relative Likelihood) ให้สมมาตร และกำจัดพารามิเตอร์รบกวนโดยวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ สามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 กำหนดให้ $x_1, \ldots, x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่สุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ และพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง λ และนำตัวอย่างสุ่มนี้มาสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ของ μ โดยใช้การดัดแปลงพารามิเตอร์ $\mu=\varphi^{-1}$ เพื่อปรับภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์ (Relative Likelihood) ให้สมมาตร และกำจัดพารามิเตอร์รบกวน λ โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์แล้ว จะได้ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ของพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นแบบโปรไฟล์ที่มีการแปลงพารามิเตอร์ (WRPL) คือ

$$\left[\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}}\right)^{-1},\ \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}}\right)^{-1}\right]$$

เมื่อ $\hat{\lambda}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}-\frac{1}{\bar{x}}\right)^{-1}$ และ $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ แทนควอนไทล์ที่ $1-\frac{\alpha}{2}$ ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

พิสูจน์

ให้ $l(\mu,\lambda)$ แทน $\log L(\mu,\lambda)$

จาก $$\log L(\mu,\lambda)=\frac{n}{2}\log\lambda-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\mu^2}+\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)+\frac{n\lambda}{\mu}$$

เมื่อกำหนดรูปแบบการแปลงคือ $\mu=\varphi^{-1}$ จะได้

$$\log L(\varphi,\lambda)=\frac{n}{2}\log(\lambda)-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i-\frac{\lambda\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i}{2}-\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\lambda\varphi$$

กำหนดให้ φ คงที่ และให้ $\frac{\partial}{\partial\lambda}\log L(\varphi,\lambda)=0$ จะได้ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ λ คือ

$$\hat{\lambda}(\varphi)=n(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i-2n\varphi+\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1})^{-1}$$

และแทน λ ใน $\log L(\varphi,\lambda)$ ด้วย $\hat{\lambda}(\varphi)$ จะได้ลอการิทึมฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์ของ φ คือ

$$\begin{aligned}\log L_p(\varphi,\hat{\lambda}(\varphi))&=\frac{n}{2}\log(\hat{\lambda}(\varphi))-\frac{\hat{\lambda}(\varphi)\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i}{2}-\frac{\hat{\lambda}(\varphi)}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}+n\hat{\lambda}(\varphi)\varphi+c\\&=\frac{n}{2}\log(\hat{\lambda}(\varphi))-\frac{\hat{\lambda}(\varphi)}{2}\left(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i-2n\varphi+\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)+c\\&=\frac{n}{2}\log(n(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i-2n\varphi+\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1})^{-1})-\frac{n}{2}+c\\&=\frac{n}{2}\log(n)-\frac{n}{2}\log(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i-2n\varphi+\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1})-\frac{n}{2}+c\end{aligned}$$

เมื่อ $c = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\log x_i$

จะได้ $$\frac{\partial}{\partial\varphi}\log L_p(\varphi,\hat{\lambda}(\varphi)) = -n(\varphi\sum_{i=1}^{n}x_i - n)\left(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n\varphi + \sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^{-1}$$

และ $$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\log L_p(\varphi,\hat{\lambda}(\varphi)) = \frac{(n\varphi\sum_{i=1}^{n}x_i - n^2)(2\varphi\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n)}{\left(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n\varphi + \sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^2} - \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i}{\left(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n\varphi + \sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)}$$

ฟิชเชอร์อินฟอเมชั่น (Fisher Information) ของ φ คือ $I(\varphi) = -\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\log L_p(\varphi,\hat{\lambda}(\varphi))$

ดังนั้น $$I(\varphi) = -\left(\frac{(n\varphi\sum_{i=1}^{n}x_i - n^2)(2\varphi\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n)}{\left(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n\varphi + \sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^2} - \frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i}{\left(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n\varphi + \sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)}\right)$$

$$= \frac{-n\varphi^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 + n\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1} + 2n^2\varphi\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n^3}{\left(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n\varphi + \sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^2}$$

และ $$I^{-1}(\varphi) = \frac{\left(\varphi^2\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n\varphi + \sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^2}{-n\varphi^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 + n\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1} + 2n^2\varphi\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n^3}$$

จะได้ความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{\varphi}$ คือ $se(\hat{\varphi}) = \sqrt{I^{-1}(\hat{\varphi})}$

จาก $$I^{-1}(\hat{\varphi}) = \frac{\left(\hat{\varphi}^2\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n\hat{\varphi} + \sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)^2}{-n\hat{\varphi}^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2 + n\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1} + 2n^2\hat{\varphi}\sum_{i=1}^{n}x_i - 2n^3}$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1} - n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)^2 \frac{1}{n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1} - n^2\right)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1} - n^2}{n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n} - \frac{1}{\bar{x}}\right) = \frac{1}{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

และช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ของ φ คือ $\hat{\varphi} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}se(\hat{\varphi})$

ดังนั้นช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)\%$ ของ φ แบบวัลด์โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์คือ

$$\left[\hat{\varphi}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}},\hat{\varphi}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}}\right]$$

ทำแปลงพารามิเตอร์กลับด้วยรูปแบบการแปลง $\varphi=\mu^{-1}$ ดังนั้น ช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ของพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นแบบโปรไฟล์ที่มีการแปลงพารามิเตอร์คือ

$$\left[\left(\hat{\varphi}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}}\right)^{-1},\left(\hat{\varphi}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}}\right)^{-1}\right]$$

หรือ

$$\left[\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}}\right)^{-1},\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}}\right)^{-1}\right]$$

เมื่อ $\hat{\lambda}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}{n}-\frac{1}{\bar{x}}\right)^{-1}$

ทฤษฎีบท 2 ให้ $x_1,\ldots,x_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนที่ไม่ทราบพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ และพารามิเตอร์กำหนดรูปร่าง λ และมีการแปลงพารามิเตอร์ด้วย $\mu=\varphi^{-1}$ เพื่อปรับภาวะน่าจะเป็นสัมพัทธ์แล้ว

$$\lim_{\varphi\to 0}-\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2=-\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})\hat{\varphi}^2$$

และ

$$\lim_{\varphi\to\infty}-\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2=-\infty$$

ดังนั้นขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่นหาได้แน่นอน แต่ขีดจำกัดล่างจะหาได้ก็ต่อเมื่อ

$$-\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})\hat{\varphi}^2\leq-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}$$

หรือ

$$\hat{\varphi}^2\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i\geq\chi^2_{1,(1-\alpha)}$$

พิสูจน์

จากสมการ (5) จะได้ว่าช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ของ φ มาจาก $\left\{\varphi \middle| -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2 \geq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}\right\}$ ดังนั้นชุดตัวอย่างสุ่มที่สามารถนำมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้ ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขนี้ $-\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2 \geq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}$ หรือสามารถตรวจสอบได้จากเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\lim_{\varphi\to 0} -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2 \leq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)} \quad \text{และ} \quad \lim_{\varphi\to \infty} -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2 \leq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}$$

ถ้าเงื่อนไขนี้เป็นจริง จะสามารถนำชุดตัวอย่างสุ่มชุดนั้นมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์และหาขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนของช่วงได้ โดยหาค่าลิมิตได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\lim_{\varphi\to 0} -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2 &= -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})\lim_{\varphi\to 0}(\varphi-\hat{\varphi})^2 \\ &= -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})\left[\lim_{\varphi\to 0}(\varphi-\hat{\varphi})\right] = -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})\hat{\varphi}^2\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\lim_{\varphi\to \infty} -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2 &= -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})\lim_{\varphi\to \infty}(\varphi-\hat{\varphi})^2 \\ &= -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})\lim_{\varphi\to \infty}(\varphi^2-2\varphi\hat{\varphi}+\hat{\varphi}^2) = -\infty\end{aligned}$$

จากผลพิสูจน์ข้างต้นจะเห็นได้ว่า $\lim_{\varphi\to \infty} -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2 = -\infty$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า $-\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}$ ดังนั้นจะหาขีดจำกัดบนของช่วงความเชื่อมั่นได้แน่นอน แต่ขีดจำกัดล่างจะหาได้ก็ต่อเมื่อ $\lim_{\varphi\to 0} -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2 \leq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}$ ดังนั้นเงื่อนไขสำหรับตัวอย่างสุ่มที่สามารถนำมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ของพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ โดยใช้ภาวะน่าจะเป็นแบบโปรไฟล์ที่มีการแปลงพารามิเตอร์คือ

$$\lim_{\varphi\to 0} -\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})(\varphi-\hat{\varphi})^2 \leq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}$$

เมื่อแทนค่าลิมิตจะได้

$$-\frac{1}{2}I(\hat{\varphi})\hat{\varphi}^2 \leq -\frac{1}{2}\chi^2_{1,(1-\alpha)}$$

เมื่อจัดรูปสมการและแทนค่า $I(\hat{\varphi})$ แล้ว จะได้เงื่อนไขคือ

$$\hat{\varphi}^2\hat{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i \geq \chi^2_{1,(1-\alpha)}$$

ผลการศึกษาเชิงจำลอง

ในหัวข้อนี้จะศึกษาความน่าจะเป็นคุ้มรวมและความยาวช่วงโดยเฉลี่ยโดยทำการจำลองมอนติคาร์โล ซึ่งขนาดตัวอย่าง (n) ที่ใช้ศึกษาคือ $5,10,15,30,45,60$ และ 100 มีพารามิเตอร์ $\mu = 1,3,7$ และ $\lambda = 0.5,1,3$ โดยใช้โปรแกรม R เวอร์ชัน 3.3.0 ซึ่งขั้นตอนการศึกษามีดังนี้

1) จำลองตัวอย่างสุ่มขนาด n ที่มีการแจกแจงแบบอินเวอร์สเกาส์เซียนซึ่งมีพารามิเตอร์ μ และ λ ตามที่กำหนด

2) ทำการแปลงพารามิเตอร์และตรวจสอบเงื่อนไขว่าตัวอย่างสุ่มสามารถนำไปสร้างช่วงความเชื่อมั่นได้หรือไม่ โดยพิจารณาว่า $\hat{\varphi}^2 \hat{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i \geq \chi^2_{1,(1-\alpha)}$ หรือไม่ หากไม่จริงให้กลับไปทำข้อ 1)

3) สร้างช่วงความเชื่อมั่นของ φ และทำการแปลงพารามิเตอร์กลับ เพื่อให้ได้ช่วงความเชื่อมั่นที่ 95% ของ μ

4) หาขีดจำกัดล่าง (L) และขีดจำกัดบน (U) ของช่วงความเชื่อมั่น และตรวจสอบว่าช่วงดังกล่าวนี้คลุมค่าพารามิเตอร์ μ หรือไม่ และคำนวณความยาวของช่วงโดยเท่ากับ $U - L$

5) ทำซ้ำข้อ 1 – 4 จำนวน 10,000 รอบ และให้สัดส่วนของจำนวนครั้งที่ช่วง $[L,U]$ คลุมพารามิเตอร์ μ เป็นค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมและคำนวณความยาวช่วงโดยเฉลี่ยได้จาก $AL = \dfrac{\sum_{i=1}^{10000}(U_i - L_i)}{10,000}$

ตารางที่ 1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมและค่าความยาวช่วงโดยเฉลี่ย (ในวงเล็บ) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับ μ ทั้ง 4 วิธี

n	μ	λ	PL	EL	RPL	WRPL
5	1	0.5	0.8004 (13.201)	0.7688 (11.77)	0.3146 (-40.06)	0.7682 (13.385)
		1	0.8626 (16.685)	0.8268 (36.521)	0.5747 (2.233)	0.8301 (9.41)
		3	0.9012 (5.724)	0.8444 (1.377)	0.8884 (3.014)	0.8455 (3.397)
	3	0.5	0.5699 (49.817)	0.5572 (30.29)	0.1076 (0.724)	0.5544 (32.273)
		1	0.7317 (45.726)	0.7177 (138.175)	0.2225 (22.816)	0.7138 (31.353)
		3	0.8666 (36.784)	0.8263 (32.768)	0.5725 (4.151)	0.8271 (26.847)
	7	0.5	0.3518 (39.777)	0.3517 (35.64)	0.0476 (-6.015)	0.3598 (37.058)
		1	0.5278 (47.293)	0.5302 (80.223)	0.0985 (0.654)	0.5196 (101.403)
		3	0.7766 (84.926)	0.7482 (106.941)	0.2835 (-5.121)	0.7545 (95.182)
10	1	0.5	0.9172 (68.591)	0.903 (10.36)	0.6535 (-0.771)	0.8987 (13.743)
		1	0.9278 (4.646)	0.9039 (3.79)	0.9072 (3.537)	0.91 (3.494)
		3	0.9254 (0.89)	0.9035 (0.78)	0.9323 (0.899)	0.9056 (0.786)
	3	0.5	0.7781 (42.334)	0.7657 (40.578)	0.1856 (-5.815)	0.7692 (38.904)
		1	0.884 (369.759)	0.8690 (77.989)	0.439 (-53.205)	0.8724 (70.328)
		3	0.9286 (16.154)	0.9045 (11.1)	0.9043 (11.067)	0.9036 (9.634)
	7	0.5	0.5367 (81.951)	0.5429 (60.122)	0.0718 (-6.889)	0.54 (68.090)
		1	0.7322 (590.525)	0.7377 (116.592)	0.163 (-16.693)	0.7302 (85.365)
		3	0.9072 (152.673)	0.8914 (94.863)	0.5708 (1.671)	0.8868 (86.202)
15	1	0.5	0.9376 (9.654)	0.925 (11.118)	0.8656 (-0.321)	0.9184 (6.200)
		1	0.9315 (1.69)	0.9188 (1.453)	0.9408 (1.694)	0.9257 (1.473)
		3	0.9356 (0.663)	0.9182 (0.612)	0.9337 (0.664)	0.9243 (0.615)

ตารางที่ 1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมและค่าความยาวช่วงโดยเฉลี่ย (ในวงเล็บ) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับ μ ทั้ง 4 วิธี (ต่อ)

n	μ	λ	PL	EL	RPL	WRPL
15	3	0.5	0.8732 (71.161)	0.8644 (73.009)	0.3117 (-7.344)	0.8595 (42.057)
		1	0.9321 (58.198)	0.92 (3311.496)	0.6891 (9.959)	0.9216 (60.792)
		3	0.9361 (5.161)	0.9249 (4.293)	0.936 (4.792)	0.9223 (4.302)
	7	0.5	0.659 (75.099)	0.6596 (85.026)	0.1055 (5.422)	0.6637 (84.149)
		1	0.8375 (231.483)	0.8297 (131.313)	0.2583 (43.439)	0.8314 (133.513)
		3	0.9317 (75.176)	0.92 (60.608)	0.8138 (-8.596)	0.9262 (110.38)
30	1	0.5	0.9437 (1.565)	0.937 (1.443)	0.9409 (1.526)	0.9379 (1.455)
		1	0.9409 (0.851)	0.9332 (0.82)	0.9443 (0.85)	0.9332 (0.816)
		3	0.9399 (0.438)	0.9291 (0.425)	0.9384 (0.438)	0.9324 (0.422)
	3	0.5	0.9414 (51.385)	0.9352 (45.149)	0.7236 (23.461)	0.939 (48.621)
		1	0.9427 (10.035)	0.9409 (9.335)	0.9338 (7.28)	0.9404 (8.983)
		3	0.9456 (2.571)	0.9398 (2.465)	0.9415 (2.561)	0.9347 (2.467)
	7	0.5	0.8453 (108.221)	0.8474 (670.657)	0.2462 (-63.86)	0.847 (162.744)
		1	0.9357 (123.798)	0.928 (175.746)	0.616 (-89.565)	0.9299 (223.835)
		3	0.9496 (13.211)	0.934 (12.379)	0.9454 (14.556)	0.9362 (12.275)
45	1	0.5	0.9474 (1.047)	0.9417 (1.015)	0.949 (1.046)	0.9451 (1.015)
		1	0.9469 (0.653)	0.9421 (0.637)	0.9459 (0.653)	0.9437 (0.634)
		3	0.9437 (0.351)	0.9422 (0.343)	0.9529 (0.35)	0.9434 (0.343)
	3	0.5	0.9514 (39.601)	0.9505 (18.344)	0.9143 (1.576)	0.947 (52.858)
		1	0.9453 (4.522)	0.9401 (4.379)	0.945 (4.529)	0.9409 (4.391)
		3	0.947 (1.955)	0.9409 (1.906)	0.9472 (1.962)	0.9403 (1.9)
	7	0.5	0.911 (183.903)	0.916 (151.392)	0.4332 (22.368)	0.9087 (290.3)
		1	0.955 (106.944)	0.9498 (82.938)	0.8654 (799.515)	0.9484 (77.617)
		3	0.9469 (8.3)	0.9409 (8.079)	0.9486 (8.406)	0.9444 (7.985)
60	1	0.5	0.9516 (0.843)	0.9411 (0.831)	0.944 (0.849)	0.941 (0.829)
		1	0.9493 (0.549)	0.9391 (0.537)	0.9475 (0.547)	0.9406 (0.538)
		3	0.9487 (0.3)	0.9476 (0.296)	0.9434 (0.3)	0.944 (0.296)
	3	0.5	0.9498 (9.433)	0.9416 (8.489)	0.9439 (8.461)	0.9465 (8.325)
		1	0.9471 (3.448)	0.9408 (3.367)	0.9435 (3.457)	0.9434 (3.353)
		3	0.9438 (1.642)	0.9397 (1.615)	0.9463 (1.643)	0.9444 (1.617)
	7	0.5	0.9417 (139.008)	0.939 (104.752)	0.631 (-21.122)	0.9376 (146.427)
		1	0.9538 (30.757)	0.9448 (29.316)	0.9426 (-590.143)	0.9489 (32.189)
		3	0.9468 (6.644)	0.9425 (6.446)	0.9455 (6.596)	0.9411 (6.462)
100	1	0.5	0.9464 (0.608)	0.9451 (0.603)	0.9499 (0.607)	0.946 (0.601)
		1	0.9483 (0.411)	0.9456 (0.407)	0.9451 (0.41)	0.9435 (0.406)
		3	0.943 (0.23)	0.9435 (0.228)	0.9491 (0.23)	0.9445 (0.228)
	3	0.5	0.9505 (3.98)	0.9453 (3.946)	0.9502 (4.004)	0.9471 (3.949)
		1	0.9461 (2.355)	0.9471 (2.324)	0.9456 (2.339)	0.9442 (2.332)

ตารางที่ 1 ค่าประมาณความน่าจะเป็นคุ้มรวมและค่าความยาวช่วงโดยเฉลี่ย (ในวงเล็บ) ของช่วงความเชื่อมั่น 95% สำหรับ μ ทั้ง 4 วิธี (ต่อ)

n	μ	λ	PL	EL	RPL	WRPL
100	3	3	0.9468 (1.232)	0.9447 (1.216)	0.9456 (1.227)	0.9495 (1.218)
	7	0.5	0.9596 (54.457)	0.9605 (141.503)	0.9162 (10.442)	0.9574 (62.196)
		1	0.9471 (11.027)	0.9422 (10.696)	0.9474 (10.91)	0.9453 (10.805)
		3	0.9486 (4.680)	0.9444 (4.617)	0.9489 (4.683)	0.945 (4.632)

จากตารางที่ 1 พบว่าเมื่อทำการจำลองประชากรที่มีการแจกแจงเดียวกันและมีพารามิเตอร์ (μ,λ) เหมือนกัน เมื่อขนาดตัวอย่าง (n) เพิ่มขึ้น ความน่าจะเป็นคุ้มรวมจะมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นจนกระทั่งใกล้เคียง 0.95 สำหรับกรณีที่ประชากรมี μ เท่ากัน และสุ่มตัวอย่างสุ่มขนาด n เท่ากันแล้ว เมื่อ λ เพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมจะมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น เนื่องจากเมื่อ λ เพิ่มขึ้น ความแปรปรวนและความเบ้จะมีค่าลดลง ดังนั้นจึงทำให้ความน่าจะเป็นคุ้มรวมมีแนวโน้มเพิ่มขึ้น สำหรับกรณีที่การแจกแจงมีความแปรปรวนและความเบ้สูง ต้องใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่ถึงจะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมเข้าใกล้ 0.95 อย่างเช่น $(\mu,\lambda)=(7,0.5)$ ซึ่งมีความแปรปรวนเท่ากับ 686 และความเบ้เท่ากับ 11.22 ถ้าจะสร้างช่วงแบบ PL ต้องใช้ขนาดตัวอย่าง 60 เพื่อให้มีความน่าจะเป็นคุ้มรวมเท่ากับ 0.9417 ส่วนช่วงแบบ EL และ WRPL ต้องใช้ขนาดตัวอย่าง 100 เพื่อให้มีความน่าจะเป็นคุ้มรวมมากกว่า 0.94 ส่วนช่วงแบบ RPL จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมต่ำทุกค่า ในกรณีที่ความแปรปรวนและความเบ้สูง

เมื่อพิจารณาความยาวช่วงโดยเฉลี่ย พบว่ากรณีที่ประชากรมีความเบ้น้อย เมื่อ n เพิ่มขึ้น ความยาวช่วงที่ได้จะมีแนวโน้มลดลง และประชากรที่มีความเบ้มากจะให้ช่วงที่กว้างกว่าประชากรที่มีความเบ้น้อย เมื่อทำการเปรียบเทียบช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 4 แบบพบว่า กรณีที่ $n \le 30$ ช่วงความเชื่อมั่นทั้ง 4 แบบจะให้ความน่าจะเป็นคุ้มรวมต่ำว่าสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนด และช่วงแบบ PL มีแนวโน้มที่จะให้ค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมสูงกว่าช่วงแบบอื่น และสำหรับกรณีที่ $n > 30$ ความยาวช่วงโดยเฉลี่ยของทั้ง 4 วิธี มีค่าใกล้เคียงกันและค่าความน่าจะเป็นคุ้มรวมก็ใกล้เคียงกันด้วย

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

ในการสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบวัลด์ของ μ สำหรับการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียนนั้น จะมีประสิทธิภาพเมื่อฟังก์ชันภาวะน่าเป็นสัมพัทธ์มีลักษณะสมมาตร และการดัดแปลงพารามิเตอร์ด้วย $\mu=\varphi^{-1}$ ทำให้ภาวะน่าเป็นสัมพัทธ์สมมาตรได้ กรณีที่การแจกแจงมีพารามิเตอร์รบกวน จะสามารถใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์เพื่อช่วยกำจัดพารามิเตอร์รบกวนนั้นได้ การสร้างช่วงจะถูกทำภายใต้พารามิเตอร์ใหม่แล้วจึงแปลงกลับให้อยู่ในรูปพารามิเตอร์เดิมด้วยความสัมพันธ์ $\varphi=\mu^{-1}$ อย่างไรก็ตาม มีตัวอย่างบางชุดที่ไม่สามารถนำมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นนี้ได้ และจากการศึกษาพบว่าตัวอย่างสุ่มที่สามารถนำมาสร้างช่วงความเชื่อมั่นแบบ WRPL ได้นั้น ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขในทฤษฎีบท 2

การใช้ช่วงแบบ WRPL เพื่อประมาณพารามิเตอร์ค่าเฉลี่ย μ นั้น เหมาะสำหรับตัวอย่างขนาดมากกว่า 30 เพราะจะให้ความน่าจะเป็นคุ้มรวมใกล้เคียงกับสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่นที่กำหนดและให้ความยาวช่วงโดยเฉลี่ยใกล้เคียงกับวิธีอื่นๆ แต่ในกรณีที่ขนาดตัวอย่างน้อยกว่า 30 นั้น ช่วงความเชื่อมั่นที่นำเสนอยังมีประสิทธิภาพต่ำกว่าช่วงแบบ PL

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.พัทธ์ชนก ศรีสุรเดชชัย อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งกรุณาสละเวลาให้ความรู้และคำแนะนำ ตลอดการทำวิทยานิพนธ์ และขอขอบพระคุณ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ที่เปิดโอกาสให้นักศึกษาได้ค้นคว้าและแสวงหาความรู้ใหม่ๆ เพื่อนำมาประยุกต์ใช้ในวิทยานิพนธ์

เอกสารอ้างอิง

พัทธ์ชนก ศรีสุรเดชชัย. ช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์สำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน. วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 2560ก; 27(2): 339-350.

พัทธ์ชนก ศรีสุรเดชชัย. สูตรอย่างง่ายสำหรับช่วงความเชื่อมั่นแบบภาวะน่าจะเป็นโปรไฟล์และแบบภาวะน่าจะเป็นโดยประมาณสำหรับค่าเฉลี่ยของการแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน. วารสารวิชาการพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 2560ข; 27(3): 467-479.

Arefi M, Mohtashami Borzadaran GR, Vaghei Y. A note on interval estimation for the mean of inverse Gaussian distribution. Statistics and Operations Research Transactions 2008; 32(1).

Díaz-Francés E. Simple Estimation Intervals for Poisson, Exponential, and Inverse Gaussian Means Obtained by Symmetrizing the Likelihood Function. The American Statistician 2016; 70(2): 171-180.

Fisher RA. Statistical Methods and Scientific Inference. New York: Macmillan; 1973.

Folks JL, Chhikara RS. The inverse Gaussian distribution and its statistical application - a review. Journal of the Royal Statistical Society.Serie B 1978; 40: 263–289.

Gelman A, Carlin JB, Stern HS, Dunson DB, Vehtari A, Rubin DB. Bayesian Data Analysis. 3rd ed. Florida: Chapman & Hall/CRC: 2014.

Neyman J. Outline of a Theory of Statistical Estimation Based on the Classical Theory of probability. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical 1937; 236(767): 333-380.

Pawitan Y. In all likelihood statistical modelling and inference using likelihood. Oxford. England: Oxford University Press; 2013.

Wilk SS. The large sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. Annals Mathematical Statistics 1938; 9: 60–62.