การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลเมื่อข้อมูลถูกตรวจตัดแบบสุ่ม

A Comparison of Parameters Estimation Methods of the Weibull Distribution Under Random Censored Samples

ดุสิต ชัยประสิทธิกุล (Dusit Chaiprasithikul)* ดร.มณฑิรา ดวงสาพล (Dr.Monthira Duangsaphon)**

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลเมื่อข้อมูลถูกตรวจตัดแบบสุ่ม โดยใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และการประมาณของเบส์โดยใช้วิธีการของลินด์เลย์ และวัดประสิทธิภาพของตัวประมาณด้วยค่าความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย ขนาดตัวอย่างที่ศึกษา คือ 10 20 50 และ 100 โดยตรวจตัดแบบสุ่มที่ตำแหน่งควอนไทล์ของข้อมูล คือ 0.3 0.5 0.7 และ 0.9 เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงไวบูลล์ที่มีพารามิเตอร์ $\alpha = 2$ และ $\beta = 1,2$ งานวิจัยนี้จะใช้โปรแกรม R จำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลกระทำซ้ำ 1,000 รอบในแต่ละสถานการณ์ ผลจากการจำลองสรุปได้ว่า เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้นค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยมีแนวโน้มลดลงเกือบทุกกรณี สำหรับ α เมื่อตัวอย่างขนาดเล็กวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมีประสิทธิภาพมากที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีประสิทธิภาพมากที่สุด สำหรับ β เกือบทุกกรณีที่วิธีการประมาณของเบส์มีประสิทธิภาพมากที่สุด และพบว่าส่วนใหญ่ตัวประมาณมีค่าความเอนเอียงเป็นบวก นั่นคือให้ค่าประมาณสูงกว่าค่าจริง

ABSTRACT

The objectives of this research are to study and compare parameters estimation of the Weibull distribution based on random censored samples. This research use three parameters estimation methods which are least square method, maximum likelihood method and Bayes' estimation using Lindley's approximation. The measurements for performance of estimators are bias and mean square error (MSE). As for the case study, we specify the sample size are 10, 20, 50 and 100, the quantile of data are 0.3, 0.5, 0.7 and 0.9, and the parameters of the Weibull distribution are $\alpha = 2$ and $\beta = 1,2$. The data set is simulated by using the Monte Carlo simulation technique with 1,000 replication for each case. The result are shown that the sample size increase as the MSE decrease in almost all of the cases. The best performance of α is the least square method for small sample size and the maximum likelihood method for large sample size. Moreover, the best performance of β is the Bayes' estimation method in almost all of the cases. Finally, the almost all of the estimators are positive bias (overestimated).

คำสำคัญ: การประมาณของเบส์ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด การประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

Keywords: Bayes' estimation, Least square method, Maximum likelihood estimation

** นักศึกษา หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์*

*** อาจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์*

บทนำ

การวิเคราะห์ข้อมูลที่เกี่ยวกับระยะเวลาการใช้งานถูกนำมาใช้ในงานวิจัยหลากหลายด้าน เช่น ด้านคณิตศาสตร์ประกันภัย ด้านเศรษฐศาสตร์ ด้านวิศวกรรมศาสตร์ ด้านวิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อม ด้านการจัดการ ด้านการแพทย์ การวิจัยดำเนินการ ด้านสาธารณสุข และด้านสังคมศาสตร์และพฤติกรรมศาสตร์ และข้อมูลเกี่ยวกับระยะเวลาการใช้งานยังถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์มากมาย เช่น การวิเคราะห์ข้อมูลการอยู่รอด การวิเคราะห์ความน่าเชื่อถือ และการวิเคราะห์เวลาจนกระทั่งเกิดเหตุการณ์ที่ล้มเหลว ซึ่งลักษณะของข้อมูลที่เกี่ยวกับระยะเวลาการใช้งานสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบการแจกแจงได้หลายรูปแบบ เช่น การแจกแจงแบบเลขชี้กำลัง การแจกแจงแกมมา การแจกแจง ล็อกปรกติ และการแจกแจงไวบูล การแจกแจงไวบูลเป็นการแจกแจงหนึ่งที่ได้รับความนิยมมากในการวิเคราะห์ข้อมูลที่เกี่ยวกับระยะเวลาการใช้งาน เพราะความหลากหลายของรูปแบบสามารถคาดการณ์ได้โดยพารามิเตอร์ที่แตกต่างกัน การแจกแจงไวบูลจึงถูกนำไปใช้อย่างกว้างขวาง เช่น ในงานวิจัยของ Bar-Lev (2004) Haibo et al. (2009) และ Kundu, Mitra (2016)

กำหนดให้ T เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นระยะเวลาการใช้งานที่มีการแจกแจงไวบูลที่มีพารามิเตอร์ α และ β ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $T \sim Weibull(\alpha,\beta)$

ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูล มีรูปแบบดังนี้

$$f(t_i;\alpha,\beta)=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\ ;\ t_i\ge 0,\ \alpha,\beta>0 \tag{1}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงไวบูล เป็นดังนี้

$$F(t_i;\alpha,\beta)=1-\exp\left[-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)\right]^{\beta} \tag{2}$$

และฟังก์ชันการอยู่รอดของการแจกแจงไวบูล เป็นดังนี้

$$S(t_i;\alpha,\beta)=1-\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right\}=\exp\left[-\left(\frac{t_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \tag{3}$$

เมื่อ α และ β เป็นพารามิเตอร์กำหนดขนาดและพารามิเตอร์กำหนดรูปร่างตามลำดับ

การวิเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับระยะเวลาการใช้งานของวัตถุจะวัดเวลาตั้งแต่เริ่มต้นใช้งานวัตถุนั้นจนกระทั่งวัตถุนั้นชำรุด ในทางปฏิบัติการเก็บรวบรวมข้อมูลอาจจะต้องใช้เวลานานในการรอคอยให้เกิดความล้มเหลว ซึ่งอาจจะส่งผลให้การเก็บรวบรวมข้อมูลมีค่าใช้จ่ายสูง ดังนั้นข้อมูลเกี่ยวกับระยะเวลาการใช้งานที่นำมาวิเคราะห์จึงมีลักษณะเป็นข้อมูลถูกตรวจตัด (Censored Data) ซึ่งรูปแบบของการตรวจตัดมีหลายรูปแบบ เช่น การตรวจตัดประเภทที่ 1 การตรวจตัดประเภทที่ 2 และการตรวจตัดแบบสุ่ม โดยรูปแบบการตรวจตัดประเภทที่ 1 เป็นรูปแบบการตรวจตัดที่จะกำหนดเวลาที่ถูกตรวจตัดไว้ล่วงหน้า ถ้าข้อมูลเกิดความล้มเหลวก่อนเวลาที่กำหนดจะให้เป็นข้อมูลที่ไม่ถูกตรวจตัด แต่ถ้าข้อมูลเกิดหลังเวลาที่กำหนดจะให้เป็นข้อมูลที่ถูกตรวจตัด ซึ่งข้อมูลที่ถูกตรวจตัดจะกำหนดให้มีค่าเท่ากับเวลาที่กำหนดไว้ล่วงหน้า ส่วนรูปแบบการตรวจตัดประเภทที่ 2 เป็นรูปแบบการตรวจตัดที่กำหนดจำนวนข้อมูลที่ไม่ถูกตรวจตัดไว้ล่วงหน้า โดยจะหยุดการทดลองเมื่อได้จำนวนค่าสังเกตครบตามที่กำหนดไว้ และรูปแบบการตรวจตัดแบบสุ่ม (Random Censoring) เป็นการตรวจตัดที่ขยายมาจากรูปแบบการตรวจตัดประเภทที่ 1 โดยที่เวลาที่ถูกตรวจตัดจะเป็นตัวแปรสุ่ม คือ หน่วยตัวอย่างแต่ละหน่วยจะมีเวลาที่ถูกตรวจตัดแตกต่างกันไป ตัวอย่างเช่น การทดสอบอายุการใช้งานของเครื่องยนต์ และทราบว่าโดยเฉลี่ยเครื่องยนต์จะชำรุดหรือเสียที่เวลา 3 ปี จึงกำหนดให้เวลาที่ถูกตรวจตัด C_i มาจากการแจกแจงเอกรูป $U(0.5\times3,1.5\times3)$ ที่มีค่าเฉลี่ยอยู่ที่ 3 ปี ถ้าเครื่องยนต์เครื่องที่ i ชำรุดหรือเสีย ก่อนเวลา C_i จะถือว่าเป็นข้อมูลที่ไม่ถูกตรวจตัด แต่ถ้าชำรุดหรือเสียภายหลังเวลา C_i จะถือว่าเป็นข้อมูลที่ถูกตรวจตัด และการตรวจตัดแบบ

สุ่มยังถูกนำมาใช้ในงานวิจัยหลายงาน เช่น ในงานวิจัยของ Haibo et al. (2009) Nandi, Dewan (2010) และ Yan, Zhenlin (2015)

การศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงที่เกี่ยวกับระยะเวลาการใช้งานยังคงเป็นเรื่องที่น่าสนใจและพัฒนาต่อไปอย่างต่อเนื่อง ซึ่งมีงานวิจัยที่นำเสนอการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลสำหรับข้อมูลที่ถูกตรวจตัด เช่น วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีการประมาณของเบส์ (Haniyeh, Saeid, 2011 และ Kundu, Raqab 2012) วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Chris, Noor, 2013) วิธีการปรับค่าความเอนเอียงสำหรับตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Yan, Zhenlin, 2015) และการอนุมานแบบเบส์ (Kundu, Mitra, 2016)

ในงานวิจัยนี้จะเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลเมื่อข้อมูลถูกตรวจตัดแบบสุ่ม โดยจะพิจารณาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Square Method) โดยจะประมาณการแจกแจงสะสมด้วยวิธี Median Rank และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Method : MLE) จะสังเกตได้ว่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดไม่สามารถเขียนได้ในรูปของสูตรปิด ดังนั้นจึงนำวิธีการของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method) ที่ประยุกต์ใช้ในฟังก์ชันบนโปรแกรม R มาใช้ในการคำนวณหาตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด นอกจากนั้นวิธีการประมาณของเบส์ (Bayes' Estimation) ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Squared Error Loss Function) กรณีที่ทราบสารสนเทศความรู้ก่อนหน้าเกี่ยวกับพารามิเตอร์ โดยตัวประมาณของเบส์ของพารามิเตอร์ คือ ค่าคาดหมายของพารามิเตอร์ซึ่งไม่สามารถหาค่าที่แน่นอนได้จึงเลือกใช้เทคนิคการประมาณของลินด์เลย์ (Lindley's Approximation) เพื่อที่จะประมาณค่าตัวประมาณของเบส์ และวัดประสิทธิภาพของตัวประมาณแต่ละวิธีด้วยค่าความเอนเอียง (Bias) และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE) โดยใช้เทคนิคการจำลองมอนติคาร์โลบนโปรแกรม R

วัตถุประสงค์การวิจัย

1. เพื่อศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงไวบูลเมื่อข้อมูลถูกตรวจตัดแบบสุ่ม โดยใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 3 วิธี คือ วิธีกำลังสองน้อยที่สุด วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีการประมาณของเบส์
2. เพื่อเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 วิธี และวัดประสิทธิภาพของตัวประมาณด้วยค่าความเอนเอียงและค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย โดยใช้เทคนิคการจำลองมอนติคาร์โลบนโปรแกรม R

วิธีการวิจัย

การตรวจตัดแบบสุ่ม

ให้ $T_1, T_2, \ldots, T_n$ เป็นข้อมูลที่ยังไม่ถูกตรวจตัดซึ่งมีจากการแจกแจงไวบูล $(Weibull(\alpha,\beta))$ เหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน และ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ เป็นเวลาที่ถูกตรวจตัดที่มาจากการแจกแจงเอกรูปต่อเนื่องบนช่วง $0.5q_p$ ถึง $1.5q_p$ $(U(0.5q_p, 1.5q_p))$ เหมือนกันและเป็นอิสระต่อกัน โดย q_p เป็นควอนไทล์ที่ p ของข้อมูลที่ยังไม่ถูกตรวจตัด และกำหนดให้ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นข้อมูลตัวอย่างที่ต้องการ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้ $X = \min(T_i, C_i)$ $i = 1, \ldots, n$ และตัวบ่งชี้ความล้มเหลว (Failure Indicators) คือ δ_i โดยที่

$$\delta_i = I(T_i \le C_i) = \begin{cases} 1 & ; T_i \le C_i \\ 0 & ; T_i > C_i \end{cases}$$

ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นสามารถเขียนได้ดังนี้

$$l(\alpha,\beta;x,\delta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\alpha,\beta)^{\delta_i} S(x_i;\alpha,\beta)^{1-\delta_i}$$

จากสมการที่ (1) และ (3) ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของการแจกแจงไวบูลมีรูปแบบดังนี้

$$l(\alpha,\beta;x,\delta)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right)^{\delta_i}\left(\exp\left[-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right)^{1-\delta_i} \tag{4}$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดเป็นวิธีที่มีแนวคิดมาจากทฤษฎีการประมาณเชิงเส้น (Theory of Linear Estimation) กำหนดให้ $x_{(1)}<x_{(2)}<\ldots<x_{(n)}$ เป็นตัวสถิติอันดับ (Order Statistics) และจากสมการที่ (2) จะได้ว่า

$$\ln\left[-\ln\left[1-F(x_{(i)};\alpha,\beta)\right]\right]=\beta\ln\left(\frac{x_{(i)}}{\alpha}\right)=\beta\ln x_{(i)}-\beta\ln\alpha$$

ในทางปฏิบัติการแจกแจงสะสมของการแจกแจงไวบูลไม่สามารถคำนวณได้เนื่องจากไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ α และ β ผู้วิจัยจึงเลือกประมาณการแจกแจงสะสมด้วยวิธี Median Rank ที่มีรูปแบบดังนี้ $F(x_{(i)};\alpha,\beta)\approx\frac{i-0.3}{n+0.4}$ เพื่อที่จะประมาณค่าตัวประมาณกำลังสองน้อยที่สุด และกำหนดให้ $y_{(i)}=\ln\left[-\ln\left[1-F(x_{(i)};\alpha,\beta)\right]\right]$ และ $x^{*}_{(i)}=\ln x_{(i)}$ จะได้ว่า

$$y_{(i)}=\beta x^{*}_{(i)}-\beta\ln\alpha \tag{5}$$

กำหนดให้ $A=\sum_{i=1}^{n}\left(y_{(i)}-\left[\beta x^{*}_{(i)}-\beta\ln\alpha\right]\right)^2$ และทำการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับ α และ β แล้วให้เท่ากับศูนย์ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}A=\sum_{i=1}^{n}2\left(y_{(i)}-\left[\beta x^{*}_{(i)}-\beta\ln\alpha\right]\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$$

$$\hat{\alpha}_{LS}=\exp\left[-\left(\frac{\bar{y}}{\hat{\beta}_{LS}}-\bar{x}^{*}\right)\right] \tag{6}$$

และ

$$\frac{\partial}{\partial\beta}A=\sum_{i=1}^{n}2\left(y_{(i)}-\left[\beta x^{*}_{(i)}-\beta\ln\alpha\right]\right)\left(0-\left[x^{*}_{(i)}-\ln\alpha\right]\right)=0$$

$$\hat{\beta}_{LS}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x^{*}_{(i)}-\bar{x}^{*}\right)\left(y_{(i)}-\bar{y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x^{*}_{(i)}-\bar{x}^{*}\right)^2} \tag{7}$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีในการอนุมานเชิงสถิติแบบดั้งเดิม (Classical Inference) ที่ใช้เพียงสารสนเทศข้อมูลเชิงประจักษ์ (Empirical Knowledge) โดยจากสมการที่ (4) จะได้ฟังก์ชันล็อกภาวะน่าจะเป็นดังนี้

$$L(\alpha,\beta;x,\delta)=\ln l(\alpha,\beta;x,\delta)=\sum_{i=1}^{n}\left[\delta_i\ln\beta-\delta_i\beta\ln\alpha+\delta_i(\beta-1)\ln x_i-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \tag{8}$$

ทำการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของสมการที่ (8) เทียบกับ α และ β ได้ผลลัพธ์ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}L(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\delta_i\beta}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}L(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\delta_i}{\beta}-\delta_i\ln\alpha+\delta_i\ln x_i-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right] \tag{10}$$

และให้สมการ (9) และ (10) เท่ากับศูนย์ แสดงได้ตามลำดับดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}L(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\delta_i\beta}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right]=0$$

$$\hat{\alpha}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\beta}}}{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}\right)^{1/\hat{\beta}} \tag{11}$$

และ
$$\frac{\partial}{\partial\beta}L(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\delta_i}{\beta}-\delta_i\ln\alpha+\delta_i\ln x_i-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]=0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{\hat{\beta}}-\left[\frac{1}{\hat{\beta}}\ln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}\right)^{\hat{\beta}}\right]\sum_{i=1}^{n}\delta_i+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\ln x_i-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\beta}}}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\beta}}\ln\left(x_i\Bigg/\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\hat{\beta}}}{\sum_{i=1}^{n}\delta_i}\right)^{1/\hat{\beta}}\right)=0 \tag{12}$$

จะเห็นว่าตัวประมาณของพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสูตรปิดได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงทำการหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันล็อกภาวะน่าจะเป็นจากค่าต่ำสุดของลบฟังก์ชันล็อกภาวะน่าจะเป็นแทน โดยใช้วิธีการของนิวตัน-ราฟสันที่ประยุกต์ใช้ในฟังก์ชัน nlminb บนโปรแกรม R นั่นคือ หาค่าต่ำสุดของ $-L(\alpha,\beta;x,\delta)$

สารสนเทศของฟิชเชอร์

ให้ $I(\alpha,\beta)$ เป็นเมทริกซ์สารสนเทศค่าสังเกตของฟิชเชอร์ (Observed Fisher's Information Matrix) สำหรับพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า α และ β ที่มีขนาด 2×2 ซึ่งมีสมาชิกเป็นค่าลบของอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชันล็อกภาวะน่าจะเป็นเทียบกับ α และ β มีรูปแบบดังนี้

$$I(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}-\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}L(\alpha,\beta) & -\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}L(\alpha,\beta)\\ -\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha}L(\alpha,\beta) & -\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}L(\alpha,\beta)\end{pmatrix}$$

โดยที่
$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}L(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\delta_i\beta}{\alpha^2}-\frac{\beta(\beta+1)}{\alpha^2}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}L(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\delta_i}{\beta^2}-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\left[\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]^2\right] \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha}L(\alpha,\beta)=\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}L(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{\delta_i}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\left[\beta\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right]$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีการประมาณของเบส์

จากการอนุมานเชิงสถิติด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดและวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดที่กล่าวมาข้างต้น ยังมีแนวคิดในการอนุมานเชิงสถิติที่แตกต่างออกไป คือวิธีการประมาณของเบส์ ซึ่งเป็นการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยการหาค่า

คาดหมายของพารามิเตอร์จากการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง (Posterior Probability Distribution) ซึ่งมาจากสารสนเทศสองส่วน คือสารสนเทศความรู้ก่อนหน้า (Prior Knowledge) ที่มีเกี่ยวกับพารามิเตอร์จากการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อน (Prior Probability Distribution) และสารสนเทศข้อมูลเชิงประจักษ์ จากฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood Function) โดยที่เมื่อทราบสารสนเทศความรู้ก่อนหน้าเกี่ยวกับพารามิเตอร์จะใช้การแจกแจงก่อนแบบให้สารสนเทศ (Informative Prior) ในการประมาณค่าของเบส์

กำหนดให้การแจกแจงก่อนของ α และ β คือการแจกแจงแกมมาที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นดังนี้

$$\pi_1(\alpha)=\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}\alpha^{a_1-1}e^{-b_1\alpha}\ ;\ a_1>0,b_1>0 \text{ และ } \pi_2(\beta)=\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\beta^{a_2-1}e^{-b_2\beta}\ ;\ a_2>0,b_2>0$$

ภายใต้ความเป็นอิสระต่อกันของ α และ β ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของการแจกแจงก่อนของ α และ β คือ $\pi(\alpha,\beta)=\pi_1(\alpha)\pi_2(\beta)$

ดังนั้นผลคูณของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นและฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของการแจกแจงก่อนเป็นดังนี้

$$l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})\pi(\alpha,\beta)$$

$$=N\alpha^{a_1-1}\beta^{a_2-1}e^{-b_1\alpha-b_2\beta}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right)^{\delta_i}\left(\exp\left[-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right)^{1-\delta_i} \tag{15}$$

โดยที่ $N=\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}$

การแจกแจงภายหลังของ α และ β มีฟังก์ชันความหนาแน่น ดังนี้

$$p(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})=\frac{l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})\pi(\alpha,\beta)}{\int_0^\infty\int_0^\infty l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})\pi(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}$$

$$=C\alpha^{a_1-1}\beta^{a_2-1}e^{-b_1\alpha-b_2\beta}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1}\exp\left[-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right)^{\delta_i}\left(\exp\left[-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right]\right)^{1-\delta_i}$$

โดยที่ $C=\frac{N}{\int_0^\infty\int_0^\infty l(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})\pi(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta}$ เป็นค่าคงที่ (Normalizing Constant)

ตัวประมาณของเบส์ของฟังก์ชัน $h(\alpha,\beta)$ ใดๆ ของ α และ β ภายใต้ฟังก์ชันการสูญเสียคลาดเคลื่อนกำลังสอง (Squared Error Loss Function) คือ การหาค่าคาดหมายของฟังก์ชัน $h(\alpha,\beta)$ จากฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง ดังนั้นตัวประมาณของเบส์ของฟังก์ชัน $h(\alpha,\beta)$ มีรูปแบบดังนี้

$$\hat{h}(\alpha,\beta)=\int_0^\infty\int_0^\infty h(\alpha,\beta)p(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta})\,d\alpha\,d\beta$$

ซึ่งปริพันธ์ข้างต้นไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสูตรปิดได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงเลือกใช้เทคนิคการประมาณค่าของลินด์เลย์เพื่อที่จะประมาณค่าตัวประมาณของเบส์

โดยกำหนดให้ $\rho(\alpha,\beta)$ แทนฟังก์ชันล็อกความหนาแน่นร่วมของการแจกแจงก่อน จะได้ว่า

$$\rho(\alpha,\beta)=\ln\pi(\alpha,\beta)=\ln\left(\frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}\frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\right)+(a_1-1)\ln\alpha-b_1\alpha+(a_2-1)\ln\beta-b_2\beta \tag{16}$$

ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังตามขอบของ α และ β มีรูปแบบตามลำดับดังนี้

$$p\left(\alpha|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta}\right)=\int_0^\infty p\left(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta}\right)d\beta=\frac{\int_0^\infty e^{L(\alpha,\beta)+\rho(\alpha,\beta)}d\beta}{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{L(\alpha,\beta)+\rho(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta}$$

และ $$p\left(\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta}\right)=\int_0^\infty p\left(\alpha,\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta}\right)d\alpha=\frac{\int_0^\infty e^{L(\alpha,\beta)+\rho(\alpha,\beta)}d\alpha}{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{L(\alpha,\beta)+\rho(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta}$$

ตัวประมาณของเบส์ของ α และ β สามารถหาได้จากค่าคาดหมายของ α และ β โดยใช้ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังตามขอบของ α และ β ซึ่งอยู่ในรูปอัตราส่วนของปริพันธ์ตามลำดับดังนี้

$$\hat{\alpha}_L=E[\alpha]=\int_0^\infty \alpha\, p\left(\alpha|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta}\right)d\alpha=\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha e^{L(\alpha,\beta)+\rho(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta}{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{L(\alpha,\beta)+\rho(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta}$$

และ $$\hat{\beta}_L=E[\beta]=\int_0^\infty \beta\, p\left(\beta|\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\delta}\right)d\beta=\frac{\int_0^\infty\int_0^\infty \beta e^{L(\alpha,\beta)+\rho(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta}{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{L(\alpha,\beta)+\rho(\alpha,\beta)}d\alpha d\beta}$$

ผู้วิจัยทำการประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมของการแจกแจงเชิงเส้นกำกับของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right)$ เพื่อใช้ในการประมาณค่าตัวประมาณของเบส์ด้วยวิธีการประมาณค่าของลินด์เลย์ โดย Miller (1981) จะได้ว่าการแจกแจงเชิงเส้นกำกับของตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\left(\hat{\alpha},\hat{\beta}\right)$ ถูกกำหนดโดย

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}\\ \hat{\beta}\end{pmatrix}:\ N\left(\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_{\alpha\alpha} & \sigma_{\alpha\beta}\\ \sigma_{\beta\alpha} & \sigma_{\beta\beta}\end{pmatrix}\right)$$

ซึ่งเมทริกซ์ความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วมคือผกผันของเมทริกซ์สารสนเทศค่าสังเกตของฟิชเชอร์

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{\alpha\alpha} & \sigma_{\alpha\beta}\\ \sigma_{\beta\alpha} & \sigma_{\beta\beta}\end{pmatrix}=I^{-1}$$

เมื่อแทนค่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของพารามิเตอร์ทั้งสองตัวลงในพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าจะได้ตัวประมาณของ Σ ซึ่งแทนด้วย $\hat{\Sigma}$ ดังนี้

$$\hat{\Sigma}=\begin{pmatrix}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha} & \hat{\sigma}_{\alpha\beta}\\ \hat{\sigma}_{\beta\alpha} & \hat{\sigma}_{\beta\beta}\end{pmatrix} \tag{17}$$

สำหรับวิธีการประมาณค่าของลินด์เลย์จะประมาณตัวประมาณของเบส์ในรูปแบบของอนุพันธ์อันดับที่สามของฟังก์ชันล็อกภาวะน่าจะเป็น และอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันล็อกความหนาแน่นร่วมของการแจกแจงก่อน จากสมการอนุพันธ์อันดับที่สองในสมการที่ (13) และ (14) จะได้อนุพันธ์อันดับที่สามของฟังก์ชันล็อกภาวะน่าจะเป็นเทียบกับพารามิเตอร์ α และ β มีรูปแบบดังนี้

$$L_{\alpha\alpha\alpha}=\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}L(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{2\delta_i\beta}{\alpha^3}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\alpha^3}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right] \tag{18}$$

$$L_{\alpha\alpha\beta}=L_{\alpha\beta\alpha}=L_{\beta\alpha\alpha}=\frac{\partial^3}{\partial\beta\partial\alpha^2}L(\alpha,\beta)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\delta_i}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\left(\beta(\beta+1)\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)+\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}(2\beta+1)\right)\right] \tag{19}$$
$$L_{\beta\beta\alpha}=L_{\beta\alpha\beta}=L_{\alpha\beta\beta}=\frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\beta^2}L(\alpha,\beta)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\left[2\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]+\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\left[\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]^2\right] \tag{20}$$
$$L_{\beta\beta\beta}=\frac{\partial^3}{\partial\beta^3}L(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2\delta_i}{\beta^3}-\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\left[\ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)\right]^3\right] \tag{21}$$

และจากสมการที่ (16) จะได้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชันล็อกความหนาแน่นร่วมของการแจกแจงก่อนเทียบกับพารามิเตอร์ α และ β มีรูปแบบตามลำดับดังนี้

$$\rho_\alpha=\frac{\partial}{\partial\alpha}\rho(\alpha,\beta)=\frac{(a_1-1)}{\alpha}-b_1 \text{ และ } \rho_\beta=\frac{\partial}{\partial\beta}\rho(\alpha,\beta)=\frac{(a_2-1)}{\beta}-b_2$$

เมื่อแทนค่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดซึ่งคือ $\hat{\alpha}$ และ $\hat{\beta}$ ลงในพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่า α และ β เราจะได้ตัวประมาณของ ρ_i และ L_{ijk} ซึ่งแทนด้วย $\hat{\rho}_i$ และ $\hat{L}_{ijk}$ โดยที่ $i,j,k=\alpha,\beta$ กำหนดให้ $(\alpha,\beta)=(1,2)$ แล้วจะได้ตัวประมาณของเบส์ของพารามิเตอร์ α และ β ด้วยเทคนิคการประมาณของลินด์เลย์ คือ

$$\hat{\alpha}_L\approx\hat{\alpha}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\alpha_{ij}+2\alpha_i\hat{\rho}_j\right)\hat{\sigma}_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\hat{L}_{ijk}\alpha_l\hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{kl}$$

และ $$\hat{\beta}_L\approx\hat{\beta}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\left(\beta_{ij}+2\beta_i\hat{\rho}_j\right)\hat{\sigma}_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2}\hat{L}_{ijk}\beta_l\hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{kl}$$

โดยที่ $\alpha_i,\alpha_l,\beta_i$ และ β_l คืออนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับ i,l และ α_{ij} และ β_{ij} คืออนุพันธ์อันดับที่สองเทียบกับ i,l ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\hat{\alpha}_L\approx\hat{\alpha}+\left[\hat{\rho}_\alpha\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{\rho}_\beta\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\right]+\frac{1}{2}\left(\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{\alpha\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{\beta\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}+\hat{L}_{\beta\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\hat{L}_{\alpha\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}+\hat{L}_{\alpha\beta\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}+\hat{L}_{\beta\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}+\hat{L}_{\beta\beta\beta}\hat{\sigma}_{\beta\beta}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}\right)$$

และ $$\hat{\beta}_L\approx\hat{\beta}+\left[\hat{\rho}_\alpha\hat{\sigma}_{\beta\alpha}+\hat{\rho}_\beta\hat{\sigma}_{\beta\beta}\right]+\frac{1}{2}\left(\hat{L}_{\alpha\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}+\hat{L}_{\alpha\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}+\hat{L}_{\beta\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}+\hat{L}_{\beta\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\right)$$
$$+\frac{1}{2}+\left(\hat{L}_{\alpha\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\beta}+\hat{L}_{\alpha\beta\beta}\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\beta\beta}+\hat{L}_{\beta\alpha\beta}\hat{\sigma}_{\beta\alpha}\hat{\sigma}_{\beta\beta}+\hat{L}_{\beta\beta\beta}\hat{\sigma}_{\beta\beta}\hat{\sigma}_{\beta\beta}\right)$$

ขั้นตอนการดำเนินงาน

ในงานวิจัยนี้ใช้โปรแกรม R จำลองด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล ดังนี้

1. กำหนดขนาดตัวอย่างที่ศึกษา (n) คือ 10 20 50 และ 100
2. กำหนดจำนวนรอบทำซ้ำ (M) 1,000 รอบ
3. จำลองข้อมูลที่มีการแจกแจงไวบูลล์ที่มีพารามิเตอร์ α และ β $(Weibull(\alpha,\beta))$ เมื่อ $\alpha=2$ และ $\beta=1,2$
4. กำหนดพารามิเตอร์ a_1,b_1 และ a_2,b_2 ดังนี้
   4.1 กรณี $\alpha=2$ และ $\beta=1$ ให้ $a_1=1,b_1=1/2$ และ $a_2=1,b_2=1$

4.2 กรณี $\alpha = 2$ และ $\beta = 2$ ให้ $a_1 = 1, b_1 = 1/2$ และ $a_2 = 1, b_2 = 1/2$

5. จำลองเวลาที่ถูกตรวจตัดที่มีการแจกแจงเอกรูปต่อเนื่องบนช่วง $0.5q_p$ ถึง $1.5q_p$ $\left(U\left(0.5q_p, 1.5q_p\right)\right)$ โดย q_p เป็นควอนไทล์ที่ p ของข้อมูล เมื่อ $p = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$

6. ทำการตรวจตัดข้อมูลแบบสุ่ม

7. คำนวณตัวประมาณของพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด $\hat{\alpha}_{LS}$ และ $\hat{\beta}_{LS}$

8. คำนวณตัวประมาณของพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\alpha}$ และ $\hat{\beta}$

9. คำนวณตัวประมาณของพารามิเตอร์ α และ β ด้วยวิธีการประมาณของเบส์ $\hat{\alpha}_L$ และ $\hat{\beta}_L$

10. ทำซ้ำข้อ 3-9 จำนวน 1,000 รอบ

11. คำนวณค่าเฉลี่ย ค่าความเอนเอียง และค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณ 3 วิธี

- ค่าความเอนเอียง (Bias)

$$Bias\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\hat{\theta}\right] - \theta$$

เมื่อ $E\left[\hat{\theta}\right]$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวประมาณแต่ละวิธีจากการทำซ้ำ 1,000 รอบในการจำลองของแต่ละสถานการณ์

θ เป็นพารามิเตอร์ α และ β ที่กำหนดไว้เป็นค่าคงที่ใด ๆ

และ $Bias\left(\hat{\theta}\right)$ เป็นค่าความเอนเอียงของตัวประมาณแต่ละวิธีจากการทำซ้ำ 1,000 รอบ

- ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Squared Error : MSE)

$$MSE\left(\hat{\theta}\right) = \frac{1}{1,000}\sum_{k=1}^{1,000}\left(\hat{\theta}_k - \theta\right)^2$$

เมื่อ $\hat{\theta}_k$ เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของการทำซ้ำครั้งที่ k ในการจำลองของแต่ละสถานการณ์

θ เป็นพารามิเตอร์ α และ β ที่กำหนดไว้เป็นค่าคงที่ใด ๆ

k เป็นการทำซ้ำในการจำลอง

และ $MSE\left(\hat{\theta}\right)$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ยของตัวประมาณแต่ละวิธีจากการทำซ้ำ 1,000 รอบ

12. สรุปผลการวิจัย

ผลการวิจัย

การนำเสนอผลการศึกษาผู้วิจัยได้เสนอในรูปแบบตารางโดยใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนความหมายต่าง ๆ

α, β แทน ค่าพารามิเตอร์ α, β ของการแจกแจงไวบูล ตามลำดับ

n แทน ขนาดตัวอย่าง

p แทน ตำแหน่งควอนไทล์ของข้อมูล

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ แทน ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ α, β ตามลำดับ

$\hat{\alpha}_{LS}, \hat{\beta}_{LS}$ แทน ตัวประมาณกำลังสองน้อยสุดของ α, β ตามลำดับ

$\hat{\alpha}_L, \hat{\beta}_L$ แทน ตัวประมาณของเบส์ของ α, β ตามลำดับ

$Est.$ แทน ค่าเฉลี่ยของตัวประมาณ

$Bias$ แทน ค่าความเอนเอียง

MSE แทน ค่าคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย

ตารางที่ 1 แสดงค่า *Est.* *Bias* และ *MSE* เมื่อ $\alpha = 2$ $\beta = 1$ และ $p = 0.3$ สำหรับแต่ละ n

n	ค่าวัดคุณสมบัติ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_{LS}$	$\hat{\beta}_{LS}$	$\hat{\alpha}_{L}$	$\hat{\beta}_{L}$
10	*Est.*	3.7271	1.5157	0.8752	1.9274	-6432.9	1.7962
	Bias	1.7271	0.5157	-1.1248	0.9274	-6434.9	0.7962
	MSE	425.43	1.1915**	1.4762*	1.7549	$1.63\text{x}10^{10}$	235.34
20	*Est.*	2.3176	1.2332	0.8019	1.7196	0.5458	1.0335
	Bias	0.3176	0.2332	-1.1981	0.7196	-1.4542	0.0335
	MSE	3.6760	0.3196	1.5438*	0.9980	377.49	0.1029**
50	*Est.*	2.1172	1.0948	0.7527	1.6234	2.4960	1.0249
	Bias	0.1172	0.0948	-1.2473	0.6234	0.4960	0.0249
	MSE	0.7781*	0.0921	1.5918	0.5968	1.0071	0.0550**
100	*Est.*	2.0239	1.0446	0.7330	1.5723	2.2475	1.0110
	Bias	0.0239	0.0446	-1.2670	0.5723	0.2475	0.0110
	MSE	0.2942*	0.0343	1.6245	0.4301	0.3932	0.0268**

หมายเหตุ : * หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ α ต่ำที่สุด ** หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ β ต่ำที่สุด

จากตารางที่ 1 เมื่อพิจารณา *MSE* สำหรับ α เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีการประมาณของเบส์ลดลง ส่วนวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมีค่า *MSE* ใกล้เคียงกันทุก n และสำหรับ β เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี

ตารางที่ 2 แสดงค่า *Est.* *Bias* และ *MSE* เมื่อ $\alpha = 2$ $\beta = 1$ และ $p = 0.5$ สำหรับแต่ละ n

n	ค่าวัดคุณสมบัติ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_{LS}$	$\hat{\beta}_{LS}$	$\hat{\alpha}_{L}$	$\hat{\beta}_{L}$
10	*Est.*	2.2136	1.3162	1.2851	1.4808	1.1108	0.9812
	Bias	0.2136	0.3162	-0.7149	0.4808	-0.8892	-0.0188
	MSE	2.1259	0.5812	0.8171*	0.7534	742.62	0.1160**
20	*Est.*	2.1010	1.1291	1.2345	1.3382	2.3415	1.0142
	Bias	0.1010	0.1291	-0.7655	0.3382	0.3415	0.0142
	MSE	0.8108	0.1388	0.7522*	0.3368	11.339	0.0749**
50	*Est.*	2.0287	1.0555	1.1870	1.3052	2.1989	1.0146
	Bias	0.0287	0.0555	-0.8130	0.3052	0.1989	0.0146
	MSE	0.2359*	0.0427	0.7198	0.1821	0.3084	0.0336**
100	*Est.*	2.0218	1.0212	1.1798	1.2794	2.1086	1.0021
	Bias	0.0218	0.0212	-0.8202	0.2794	0.1086	0.0021
	MSE	0.1082*	0.0187	0.7022	0.1213	0.1286	0.0169**

หมายเหตุ : * หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ α ต่ำที่สุด ** หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ β ต่ำที่สุด

จากตารางที่ 2 เมื่อพิจารณา *MSE* สำหรับ α เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี และสำหรับ β เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี

ตารางที่ 3 แสดงค่า *Est.* *Bias* และ *MSE* เมื่อ $\alpha=2$ $\beta=1$ และ $p=0.7$ สำหรับแต่ละ n

n	ค่าวัดคุณสมบัติ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_{LS}$	$\hat{\beta}_{LS}$	$\hat{\alpha}_L$	$\hat{\beta}_L$
10	*Est.*	2.1144	1.2105	1.6454	1.2247	2.4966	1.0042
	Bias	0.1144	0.2105	-0.3546	0.2247	0.4966	0.0042
	MSE	0.6777	0.3004	0.4951*	0.3398	0.9899	0.0986**
20	*Est.*	2.0336	1.0934	1.6038	1.1403	2.2310	1.0151
	Bias	0.0336	0.0934	-0.3962	0.1403	0.2310	0.0151
	MSE	0.3179*	0.0865	0.3626	0.1381	0.4080	0.0571**
50	*Est.*	2.0117	1.0382	1.5695	1.1336	2.0915	1.0106
	Bias	0.0117	0.0382	-0.4305	0.1336	0.0915	0.0106
	MSE	0.1196*	0.0271	0.2609	0.0636	0.1333	0.0232**
100	*Est.*	2.0102	1.0163	1.5658	1.1234	2.0499	1.0033
	Bias	0.0102	0.0163	-0.4342	0.1234	0.0499	0.0033
	MSE	0.0627*	0.0120	0.2273	0.0383	0.0664	0.0112**

หมายเหตุ : * หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ α ต่ำที่สุด ** หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ β ต่ำที่สุด

จากตารางที่ 3 เมื่อพิจารณา *MSE* สำหรับ α เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี และสำหรับ β เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี

ตารางที่ 4 แสดงค่า *Est.* *Bias* และ *MSE* เมื่อ $\alpha=2$ $\beta=1$ และ $p=0.9$ สำหรับแต่ละ n

n	ค่าวัดคุณสมบัติ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_{LS}$	$\hat{\beta}_{LS}$	$\hat{\alpha}_L$	$\hat{\beta}_L$
10	*Est.*	2.0843	1.1453	1.9583	1.0537	2.2940	1.0092
	Bias	0.0843	0.1453	-0.0417	0.0537	0.2940	0.0092
	MSE	0.4696	0.1577	0.4335*	0.1503	0.5405	0.0790**
20	*Est.*	2.0361	1.0609	1.9245	1.0125	2.1396	1.0059
	Bias	0.0361	0.0609	-0.0755	0.0125	0.1396	0.0059
	MSE	0.2395*	0.0569	0.2407	0.0666	0.2531	0.0429**
50	*Est.*	2.0061	1.0284	1.8881	1.0231	2.0460	1.0085
	Bias	0.0061	0.0284	-0.1119	0.0231	0.0460	0.0085
	MSE	0.0941*	0.0186	0.0987	0.0274	0.0953	0.0166**
100	*Est.*	2.0045	1.0141	1.8809	1.0226	2.0245	1.0045
	Bias	0.0045	0.0141	-0.1191	0.0226	0.0245	0.0045
	MSE	0.0493*	0.0085	0.0593	0.0145	0.0495	0.0080**

หมายเหตุ : * หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ α ต่ำที่สุด ** หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ β ต่ำที่สุด

จากตารางที่ 4 เมื่อพิจารณา *MSE* สำหรับ α เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี และสำหรับ β เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี

ตารางที่ 5 แสดงค่า *Est.* *Bias* และ *MSE* เมื่อ $\alpha = 2$ $\beta = 2$ และ $p = 0.3$ สำหรับแต่ละ n

n	ค่าวัดคุณสมบัติ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_{LS}$	$\hat{\beta}_{LS}$	$\hat{\alpha}_L$	$\hat{\beta}_L$
10	*Est.*	2.2258	2.9740	1.2585	2.9746	$-2.0\text{x}10^{42}$	$1.0\text{x}10^{42}$
	Bias	0.2258	0.9740	-0.7415	0.9746	$-2.0\text{x}10^{42}$	$1.0\text{x}10^{42}$
	MSE	4.1919	7.1987	0.6645*	1.9175**	$2.1\text{x}10^{87}$	$5.5\text{x}10^{86}$
20	*Est.*	2.0811	2.3492	1.2239	2.8537	2.4283	1.9771
	Bias	0.0811	0.3492	-0.7761	0.8537	0.4283	-0.0229
	MSE	0.5120*	0.8888	0.6622	1.2826	3.8729	0.3731**
50	*Est.*	2.0255	2.1430	1.1990	2.8469	2.2038	2.0146
	Bias	0.0255	0.1430	-0.8010	0.8469	0.2038	0.0146
	MSE	0.1283*	0.2563	0.6649	0.9965	0.2286	0.1892**
100	*Est.*	2.0054	2.0681	1.1868	2.8315	2.0928	2.0077
	Bias	0.0054	0.0681	-0.8132	0.8315	0.0928	0.0077
	MSE	0.0582*	0.1129	0.6737	0.8511	0.0797	0.0980**

หมายเหตุ : * หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ α ต่ำที่สุด ** หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ β ต่ำที่สุด

จากตารางที่ 5 เมื่อพิจารณา *MSE* สำหรับ α เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีการประมาณของเบส์ลดลง ส่วนวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมีค่า *MSE* ใกล้เคียงกันทุก n และสำหรับ β เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี

ตารางที่ 6 แสดงค่า *Est.* *Bias* และ *MSE* เมื่อ $\alpha = 2$ $\beta = 2$ และ $p = 0.5$ สำหรับแต่ละ n

n	ค่าวัดคุณสมบัติ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_{LS}$	$\hat{\beta}_{LS}$	$\hat{\alpha}_L$	$\hat{\beta}_L$
10	*Est.*	2.0648	2.5782	1.5207	2.6405	2.4091	1.9412
	Bias	0.0648	0.5782	-0.4793	0.6405	0.4091	-0.0588
	MSE	0.4296	2.0608	0.3436*	1.3433	1.2654	0.4561**
20	*Est.*	2.0061	2.2422	1.5066	2.5068	2.1854	2.0219
	Bias	0.0061	0.2422	-0.4934	0.5068	0.1854	0.0219
	MSE	0.1316*	0.4789	0.3035	0.7302	0.2398	0.2884**
50	*Est.*	2.0055	2.0947	1.4899	2.5055	2.0753	2.0176
	Bias	0.0055	0.0947	-0.5101	0.5055	0.0753	0.0176
	MSE	0.0513*	0.1434	0.2841	0.4772	0.0656	0.1190**
100	*Est.*	2.0024	2.0421	1.4887	2.4842	2.0364	2.0057
	Bias	0.0024	0.0421	-0.5113	0.4842	0.0364	0.0057
	MSE	0.0245*	0.0683	0.2734	0.3535	0.0277	0.0628**

หมายเหตุ : * หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ α ต่ำที่สุด ** หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ β ต่ำที่สุด

จากตารางที่ 6 เมื่อพิจารณา *MSE* สำหรับ α เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี และสำหรับ β เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี

ตารางที่ 7 แสดงค่า *Est.* *Bias* และ *MSE* เมื่อ $\alpha = 2$ $\beta = 2$ และ $p = 0.7$ สำหรับแต่ละ n

n	ค่าวัดคุณสมบัติ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_{LS}$	$\hat{\beta}_{LS}$	$\hat{\alpha}_L$	$\hat{\beta}_L$
10	*Est.*	2.0306	2.4368	1.7199	2.3905	2.2155	2.0144
	Bias	0.0306	0.4368	-0.2801	0.3905	0.2155	0.0144
	MSE	0.2163	1.2457	0.1863*	1.0102	0.4350	0.4116**
20	*Est.*	1.9958	2.1859	1.7137	2.2678	2.0833	2.0296
	Bias	-0.0042	0.1859	-0.2863	0.2678	0.0833	0.0296
	MSE	0.0790*	0.3396	0.1405	0.4554	0.0998	0.2295**
50	*Est.*	1.9958	2.0767	1.7075	2.2701	2.0290	2.0217
	Bias	-0.0042	0.0767	-0.2925	0.2701	0.0290	0.0217
	MSE	0.0316*	0.0967	0.1093	0.2348	0.0339	0.0830**
100	*Est.*	1.9996	2.0350	1.7072	2.2600	2.0161	2.0087
	Bias	-0.0004	0.0350	-0.2928	0.2600	0.0161	0.0087
	MSE	0.0156*	0.0462	0.0977	0.1542	0.0162	0.0431**

หมายเหตุ : * หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ α ต่ำที่สุด ** หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ β ต่ำที่สุด

จากตารางที่ 7 เมื่อพิจารณา *MSE* สำหรับ α เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี และสำหรับ β เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี

ตารางที่ 8 แสดงค่า *Est.* *Bias* และ *MSE* เมื่อ $\alpha = 2$ $\beta = 2$ และ $p = 0.9$ สำหรับแต่ละ n

n	ค่าวัดคุณสมบัติ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}_{LS}$	$\hat{\beta}_{LS}$	$\hat{\alpha}_L$	$\hat{\beta}_L$
10	*Est.*	2.0105	2.3403	1.8858	2.1680	2.1155	2.0380
	Bias	0.0105	0.3403	-0.1142	0.1680	0.1155	0.0380
	MSE	0.1268	0.7684	0.1196*	0.6771	0.1683	0.3470**
20	*Est.*	1.9997	2.1415	1.8878	2.0753	2.0456	2.0236
	Bias	-0.0003	0.1415	-0.1122	0.0753	0.0456	0.0236
	MSE	0.0597*	0.2472	0.0690	0.3007	0.0642	0.1812**
50	*Est.*	1.9980	2.0580	1.8842	2.0881	2.0150	2.0161
	Bias	-0.0020	0.0580	-0.1158	0.0881	0.0150	0.0161
	MSE	0.0237*	0.0768	0.0357	0.1238	0.0241	0.0683**
100	*Est.*	1.9994	2.0292	1.8834	2.0875	2.0078	2.0089
	Bias	-0.0006	0.0292	-0.1166	0.0875	0.0078	0.0089
	MSE	0.0126*	0.0354	0.0250	0.0691	0.0127	0.0333**

หมายเหตุ : * หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ α ต่ำที่สุด ** หมายถึง ค่า *MSE* ของตัวประมาณ β ต่ำที่สุด

จากตารางที่ 8 เมื่อพิจารณา *MSE* สำหรับ α เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี และสำหรับ β เมื่อ n เพิ่มขึ้น ค่า *MSE* ของแต่ละวิธีลดลงในทุกกรณี

จากตารางที่ 1 ถึง 4 สำหรับ α ที่ $p=0.3,0.5$ เมื่อ $n=10,20$ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด เมื่อ $n=50,100$ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด และที่ $p=0.7,0.9$ เมื่อ $n=10$ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด เมื่อ $n=20,50,100$ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด และสำหรับ β เกือบทุกกรณีที่วิธีการประมาณของเบส์ให้ค่า MSE ต่ำที่สุด มีเพียงกรณี $p=0.3$ เมื่อ $n=10$ ที่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด

และจากตารางที่ 5 ถึง 8 สำหรับ α ที่ $p=0.3,0.5,0.7,0.9$ เมื่อ $n=10$ วิธีกำลังสองน้อยที่สุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด เมื่อ $n=20,50,100$ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด และสำหรับ β เกือบทุกกรณีที่วิธีการประมาณของเบส์ให้ค่า MSE ต่ำที่สุด มีเพียงกรณี $p=0.3$ เมื่อ $n=10$ ที่วิธีกำลังสองน้อยที่สุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

เมื่อพิจารณาค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (MSE) สำหรับ α เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่า MSE มีแนวโน้มลดลงเกือบทุกกรณี มีเพียงวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในกรณีที่ $p=0.3$ ที่ค่า MSE ใกล้เคียงกันในแต่ละขนาดตัวอย่าง และสำหรับ β เมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น ค่า MSE มีแนวโน้มลดลงในทุกกรณี แสดงให้เห็นถึงความเป็นจริงที่ว่าตัวประมาณมีค่าเข้าใกล้ค่าพารามิเตอร์ นั่นคือตัวประมาณเป็นตัวประมาณที่คงเส้นคงวา และสำหรับ α และ β ในแต่ละขนาดตัวอย่าง เมื่อ p เพิ่มขึ้น ค่า MSE มีแนวโน้มลดลงในทุกกรณี นอกจากนั้นสำหรับ α เมื่อขนาดตัวอย่างน้อย วิธีกำลังสองน้อยที่สุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด เมื่อขนาดตัวอย่างมาก วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด และสำหรับ β เกือบทุกกรณีที่วิธีการประมาณของเบส์ให้ค่า MSE ต่ำที่สุด มีเพียงกรณีที่ตำแหน่งควอนไทล์น้อย ๆ และตัวอย่างขนาดเล็กที่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีกำลังสองน้อยที่สุดให้ค่า MSE ต่ำที่สุด แสดงให้เห็นว่าสำหรับ α เมื่อตัวอย่างขนาดเล็กวิธีกำลังสองน้อยที่สุดมีประสิทธิภาพมากที่สุด เมื่อตัวอย่างขนาดใหญ่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีประสิทธิภาพมากที่สุด สำหรับ β เกือบทุกกรณีที่วิธีการประมาณของเบส์มีประสิทธิภาพมากที่สุด และเมื่อพิจารณาตัวประมาณสำหรับ α และ β พร้อมกันสำหรับขนาดเล็กวิธีการประมาณของเบส์มีประสิทธิภาพมากที่สุด และสำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีการประมาณของเบส์มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกัน

เมื่อพิจารณาค่าความเอนเอียง ($Bias$) สำหรับ α มี 62.50% ของกรณีทั้งหมดที่ค่า $Bias$ เป็นบวก นั่นคือให้ค่าประมาณสูงกว่าค่าจริง และ 37.50% ของกรณีทั้งหมดที่ค่า $Bias$ เป็นลบ นั่นคือให้ค่าประมาณต่ำกว่าค่าจริง และสำหรับ β เกือบทุกกรณีมีค่า $Bias$ เป็นบวก นั่นคือให้ค่าประมาณสูงกว่าค่าจริง มีเพียงวิธีการประมาณของเบส์กรณี $p=0.5$ เมื่อ $n=10$ ที่ค่า $Bias$ เป็นลบ นั่นคือให้ค่าประมาณต่ำกว่าค่าจริง ซึ่งคิดเป็น 2.08% ของกรณีทั้งหมด นอกจากนั้นสังเกตได้ว่าถ้าตัวอย่างขนาดใหญ่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีการประมาณแบบเบส์มีค่า MSE ใกล้เคียงกัน เมื่อนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงอาจจะนำค่า $Bias$ มาพิจารณาร่วม โดยอาจจะเลือกใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ให้ค่าสัมบูรณ์ของค่า $Bias$ ต่ำกว่า และผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะเพื่อเป็นแนวทางให้ผู้ที่สนใจศึกษาเพิ่มเติม คือ การขยายผลการศึกษาออกไปให้เกิดประโยชน์ยิ่งขึ้น โดยศึกษาในสถานการณ์อื่น ๆ เช่น การกำหนดวิธีการตรวจตัดแบบสุ่มโดยใช้การแจกแจงอื่น ๆ นอกเหนือจากการแจกแจงเอกรูปต่อเนื่อง การกำหนดจำนวนข้อมูลตัวอย่าง การกำหนดพารามิเตอร์กำหนดรูปร่างและพารามิเตอร์กำหนดขนาด การกำหนดการแจกแจงก่อน การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดด้วย EM อัลกอริทึม และการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการของเบส์ด้วยวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบกิบส์ (Gibbs Sampling)

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ดร.มณฑิรา ดวงสาพล เป็นอย่างสูงที่คอยช่วยเหลือ ให้คำปรึกษา ให้คำแนะนำและให้กำลังใจเป็นอย่างดีมาโดยตลอด ขอขอบพระคุณผู้ปกครองที่คอยเป็นกำลังใจให้เสมอมา ขอขอบคุณทางสาขาวิชาที่คอยสนับสนุนการทำงานวิจัยในครั้งนี้ และขอขอบคุณเพื่อน ๆ ทุกคนที่คอยเป็นกำลังใจ ให้การช่วยเหลือและเป็นที่ปรึกษาร่วมทุกข์ร่วมสุขกับข้าพเจ้าตลอดการทำงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

BAR-LEV SK. Likelihood-based inference for the shape parameter of a two parameter Weibull distribution. Lifetime Data Analysis 2004; 10: p. 293–308.

Chris BG, Noor AI. Methods for estimating the 2-parameter Weibull distribution with type-I censored data. Research Journal of Applied Sciences, Engineering and Technology 2013; 5(3): p. 689-694.

Haibo L, Zhengping Z, Yanping H, Deqiang Z. Maximum likelihood estimation of Weibull distribution based on random censored data and its application. In: Rui K, Hong-Zhong H, Ming JZ, Qiang M, editors. The Proceedings of 2009 8th International Conference on Reliability, Maintainability and Safety; 2009 July 20-24; China. Chengdu: Chinese Society of Aeronautics and Astronautics; 2009. p. 302-304.

Haniyeh P, Saeid A. Estimation of the Weibull distribution based on type-II censored samples. Applied Mathematical Sciences 2011; 52(5): p. 2549-2558.

Kundu D, Mitra D. Bayesian inference of Weibull distribution based on left truncated and right censored data. Journal of Statistical Planning and Inference 2016; 99: p. 38–50.

Kundu D, Raqab MZ. Bayesian inference and prediction of order statistics for a type-II censored Weibull distribution. Journal of Statistical Planning and Inference 2012; 142: p. 41–47.

Miller RG Jr. Survival Analysis. New York: Wiley; 1981.

Nandi S, Dewan I. An EM algorithm for estimating the parameters of bivariate Weibull distribution under random censoring. Computational Statistics and Data Analysis 2010; 54: p. 1559-1569.

Yan S, Zhenlin Y. Bias-correction for Weibull common shape estimation. Journal of Statistical Computation and Simulation 2013: p. 1-28.