

การอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด Mathematical Argumentation in Classroom Using Lesson Study and Open Approach

ธชนี ไสยรส (Thachinee Saiyaros)* ดร.สมควร สีชมภู (Dr.Somkuan Srichompoo)**

ดร.ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ (Dr.Maitree Inprasitha)***

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์การอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนโดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ กลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 15 คน ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2561 โรงเรียนคุณาพิทยาสรรพ์ จังหวัดขอนแก่น จัดการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดภายใต้กระบวนการศึกษาชั้นเรียนตามแนวคิดของ Inprasitha (2011) เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องรูปสามเหลี่ยม จำนวน 5 แผน ใบกิจกรรม ก้อนวิดิทัศน์และเครื่องบันทึกเสียง วิเคราะห์ข้อมูลโดยการวิเคราะห์โพรโตคอลการแก้ปัญหาของนักเรียนและการสะท้อนผลของทีมวิจัย โดยใช้กรอบการอภิปรายโต้แย้งของ CCSS (2010) ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนสามารถสร้างการอภิปรายโต้แย้งและวิจารณ์เหตุผลของผู้อื่นได้ ใช้สมมติฐาน/ความรู้ที่มีก่อนหน้าในการสร้างข้อโต้แย้ง สามารถสร้างการคาดเดาและสร้างข้อสนับสนุนของข้อกล่าวอ้างเพื่อสำรวจความจริงของการคาดคะเนของตนเอง ชี้แจงข้อสรุปของตนเองสื่อสารกับคนอื่นๆ และตอบข้อโต้แย้งของผู้อื่นได้

ABSTRACT

This research aims to explore mathematical argumentation in classroom by qualitative methodology. The target group is 15 students in grade 4, 1st semester in 2018 academic year at Khu Kham Phitthayasan School, KhonKaen. This research collected data through teaching with Lesson Study and Open Approach according to Inprasitha (2011). The data was analyzed include: lesson plan (Triangle), student's work sheet and protocols of student's problem solving and reflect by research team. This research analyzed mathematical argumentation according to CCSS (2010). Research result show that student can construct viable arguments and critique the reasoning of others, use stated assumptions definitions and previously established results in constructing arguments. They able to create predictions and build support for the speech to explore the truth of their own predictions. Communicate with others and answer other people's arguments.

คำสำคัญ: การอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ การศึกษาชั้นเรียน วิธีการแบบเปิด

Keywords: Mathematical Argumentation, Lesson Study, Open Approach

*นักศึกษาคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น สาขาการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

**อาจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

***รองศาสตราจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

บทนำ

ชั้นเรียนคณิตศาสตร์ของไทยนั้นยังคงมีปัญหาในด้านการจัดการเรียนการสอนอย่างเห็นได้ชัด โดยเฉพาะแนวทางการสอนที่ครูเป็นผู้ชี้้นำความรู้และนำเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหา ลักษณะการทำกิจกรรมอยู่ในลักษณะถามตอบ ซึ่งครูเป็นผู้ถามคำถามที่มีคำตอบตายตัว นักเรียนเพียงตอบคร่าวๆ ใช่หรือไม่ใช่ ถูกต้องหรือไม่ถูกต้องเท่านั้น จะเห็นว่านักเรียนไม่มีโอกาสในการแสดงออกทางความคิดอย่างอิสระและไม่มีหลักฐานยืนยันได้อย่างแน่ชัดว่าการที่นักเรียนตอบได้นั้นเกิดจากความเข้าใจของนักเรียนเองหรือเกิดจากการชี้คำตอบของครู หากครูปรับเปลี่ยนกลยุทธ์ในการสอนโดยกระตุ้นให้นักเรียนมีการคิดอย่างหลากหลาย จัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่อยู่ในลักษณะที่ครูและนักเรียนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นร่วมกัน มีการถกเถียงปัญหาที่เกี่ยวข้องกับกิจกรรมที่ทำ มีการช่วยเหลือซึ่งกันทั้งสองฝ่ายย่อมส่งผลต่อกระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน (ไมตรี, 2546) สิ่งสำคัญอยู่ที่การสร้างบริบทที่เหมาะสมแก่การเรียนรู้ เปลี่ยนมุมมองของวิธีการสอน โดยไม่ได้เน้นเพียงแค่ผลลัพธ์ แต่เน้นกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ เปลี่ยนเนื้อหาสาระที่มีอยู่เดิมนั้นให้เป็นสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดให้นักเรียนได้เผชิญปัญหาและทำการแก้ปัญหาด้วยตนเอง โดยมีงานทางคณิตศาสตร์เป็นสื่อกลางที่สำคัญของการอภิปรายโต้แย้งในชั้นเรียนระหว่างครูกับนักเรียนและระหว่างนักเรียนกับนักเรียน (NCTM, 1991) แต่เนื่องจากอุปสรรคหลักสองประการสำหรับการพัฒนาการอภิปรายโต้แย้งของนักเรียน คือการขาดโอกาสในการอภิปรายโต้แย้งในห้องเรียน (Driver, 2000) แม้จะมีหลายโอกาสในการอภิปรายและการสื่อสารที่เกิดขึ้นในห้องเรียนที่นักเรียนแลกเปลี่ยนคำตอบในการคำนวณ ไม่เห็นด้วยกับคำตอบ อธิบายกลยุทธ์การแก้ปัญหาแตกต่างกัน (Langrall & Rumsey, 2016) แต่ยังคงขาดครูที่มีทักษะในการจัดการอภิปรายโต้แย้ง (Driver, 2000) อีกทั้งการแสดงความคิดเห็นของเด็กแต่ละคนไม่ว่าจะผิดหรือไม่ก็ตามเป็นสิ่งสำคัญมาก ครูต้องพยายามใช้ความขัดแย้งระหว่างการอภิปรายโต้แย้งของนักเรียนอย่างระมัดระวัง เพื่อเป็นโอกาสที่ดีสำหรับนักเรียนในการทำความเข้าใจกับปัญหามากขึ้น (Sekiguchi, 2002) โดยสิ่งสำคัญอยู่ที่การยอมรับความคิดเห็นที่แตกต่างกัน การโต้แย้งด้วยเหตุผลจะมีความต่อเนื่องไปเรื่อยๆจนกระทั่งได้ความคิดที่สามารถแบ่งปันหรือเข้าร่วมกันได้ การมีอยู่และเติบโตของความคิดทางคณิตศาสตร์และการทำให้กลายเป็นหลักเกณฑ์ทั่วไป (PISA, 2003 cited in OECD, 2003) หากแต่ชั้นเรียนส่วนใหญ่ของนักเรียนเป็นเพียงผู้รับโดยไม่มีการโต้แย้ง หรือเกิดข้อสงสัยขึ้นในชั้นเรียน ทำให้ชั้นเรียนเงียบและขาดการอภิปรายโต้แย้งที่สำคัญ (OECD, 2003) ฉะนั้นการจะทำให้ชั้นเรียนเป็นชั้นเรียนที่มีบริบทที่ส่งเสริมการอภิปรายโต้แย้งจึงไม่ใช่เรื่องง่าย เนื่องจากการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทยส่วนใหญ่แล้วเตรียมการสอนโดยยึดหนังสือเรียนและคู่มือครูเป็นหลัก ครูออกแบบการสอนเพียงผู้เดียว (ไมตรี, 2557)

วิธีการที่จะนำมาใช้ในการปรับเปลี่ยนวิธีสอนลักษณะนี้จำเป็นต้องใช้สิ่งที่เรียกว่านวัตกรรมไม่ใช่แค่เพียงปรับเปลี่ยนวิธีการสอนเท่านั้น (ไมตรี, 2546) เพื่อทำให้ชั้นเรียนเป็นชั้นเรียนของกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ Imprasitha (2011) จึงได้นำวิธีการแบบเปิดเข้ามาใช้ในฐานะวิธีการสอนภายใต้กระบวนการศึกษาชั้นเรียน เพื่อเปลี่ยนแปลงและปรับปรุงแนวทางการสอนในชั้นเรียนอย่างต่อเนื่องและสม่ำเสมอทั้งการสอนของครูผู้สอนและกระบวนการเรียนรู้ของนักเรียนซึ่ง “วิธีการแบบเปิด (Open Approach)” เปลี่ยนบทบาทของครูจากการถ่ายทอดความรู้ไปสู่ให้นักเรียนมาเป็นการนำเสนอปัญหาปลายเปิดกับนักเรียนโดยไม่มีการอธิบายความรู้ก่อนเหมือนที่เคยปฏิบัติ วิธีการแบบเปิดนี้แบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้ (1) นำเสนอปัญหาปลายเปิด (2) เรียนรู้ด้วยตนเองผ่านการแก้ปัญหา (3) อภิปรายเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้น (4) สรุปโดยเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นของนักเรียนและเพื่อการพัฒนาวิชาชีพครูจึงต้องดำเนินการภายใต้ “การศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study)” เพื่อให้ครูร่วมกันออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนที่เหมาะสมร่วมกันทุกสัปดาห์ (ไมตรี, 2557) ดังนี้ (1) ร่วมกันวิเคราะห์ ลำดับกิจกรรมการสอนจาก

หนังสือเรียน (Collaborative Plan) (2) ร่วมมือกันสังเกตการสอนรายคาบในแต่ละสัปดาห์ (Collaborative Do) และ (3) ร่วมมือกันสะท้อนผลการสอนรายสัปดาห์ (Collaborative See)

ด้วยแผนการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2560 – 2579 มุ่งพัฒนาผู้เรียนทุกคนให้มีคุณลักษณะและทักษะการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ซึ่งการอภิปรายโต้แย้งเป็นหนึ่งในกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในการพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Langrall & Rumsey, 2016) สอดคล้องกับ Strigler and Hiebert (1999) ที่ว่าการพิสูจน์ด้วยการอภิปรายโต้แย้งจะช่วยให้นักเรียนได้แสดงแนวคิด อธิบายเหตุผลในการพิสูจน์ข้อโต้แย้งกับข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์กับเพื่อนแต่ละคนในระหว่างการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์จากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดได้ชัดเจนยิ่งขึ้น ช่วยให้นักเรียนพัฒนาความเข้าใจในวิชาคณิตศาสตร์ของตนเองและเพิ่มทักษะด้านการคิดทางคณิตศาสตร์ (Lam, 2012) เนื่องจากมีความสำคัญต่อการเข้าถึงกระบวนการทางความรู้ ความเข้าใจของกันและกันทั้งระหว่างนักเรียนกับนักเรียน และระหว่างนักเรียนกับครู เพื่อพัฒนาความสามารถในการสื่อสารและเพื่อสนับสนุนการพัฒนาเหตุผล (Aleixandre & Erduran, 2007) การอภิปรายโต้แย้งจึงสอดคล้องโดยตรงกับกระบวนการให้เหตุผล และกระบวนการสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน (2560) กล่าวถึง เนื่องจากทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เหล่านี้เป็นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จะช่วยให้ผู้เรียนสามารถถ่ายทอดความรู้ความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ หรือกระบวนการคิดของตนให้ผู้อื่นรับรู้ได้อย่างถูกต้องชัดเจนและมีประสิทธิภาพ ผ่านการคิดวิเคราะห์ในการรวบรวมข้อเท็จจริง ข้อความ แนวคิด สถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ต่าง ๆ เพื่อให้เกิดข้อเท็จจริงหรือสถานการณ์ใหม่ การที่ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการอภิปรายหรือการเขียนเพื่อแลกเปลี่ยนความรู้และความคิดเห็นถ่ายทอดประสบการณ์ซึ่งกันและกันยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่นจะช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมายเข้าใจได้อย่างกว้างขวางลึกซึ้งและจดจำได้นานมากขึ้นสอดคล้องกับไมตรี (2557) ที่ว่าการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 นั้นต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยตัวนักเรียนเองและการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ต้องเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้อธิบายให้เหตุผล อภิปรายโต้แย้ง หาข้อสรุปหรือมีโอกาสที่จะสงสัย

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นว่าการอภิปรายโต้แย้งส่งผลต่อการเรียนคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด เพื่อสร้างทีมวิจัยที่ร่วมกันออกแบบสถานการณ์ปัญหาแบบเปิดเพื่อให้ผู้เรียนเกิดปัญหาทางคณิตศาสตร์ของตนเองในระหว่างการแก้ปัญหาและเกิดการอภิปรายโต้แย้งที่หลากหลายในชั้นเรียน แต่การสร้างปัญหาปลายเปิดทางคณิตศาสตร์ที่ต้นนั้นถือเป็นเรื่องยากจึงจำเป็นต้องมีทีมศึกษาชั้นเรียนเพื่อร่วมกันออกแบบสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดที่เหมาะสม

คำถามวิจัย

การอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดเป็นอย่างไร

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ในการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์การอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด

ขอบเขตของการวิจัย

กลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายที่ใช้ในการทำวิจัยในครั้งนี้ คือ นักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 15 คน ซึ่งเป็นนักเรียนที่ผ่านการเรียนการสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิดในฐานะวิธีการสอนภายใต้บริบทการศึกษาชั้นเรียน เป็นระยะเวลา 3 ปีอย่างต่อเนื่อง

ขอบเขตเนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย

ขอบเขตเนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้เนื้อหาสาระเกี่ยวกับเรขาคณิตเรื่อง รูปสามเหลี่ยม จำนวน 5 แผน นำมาจากหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ สำหรับระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เล่มที่ 1 ที่จัดทำขึ้นภายใต้ความร่วมมือระหว่าง Center for Research on International Cooperation in Educational Development (CRICED), University of Tsukuba ประเทศญี่ปุ่นและศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ระยะเวลาที่ทำการวิจัย

เก็บข้อมูลในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2561

วิธีการวิจัย

บริบทชั้นเรียน

โรงเรียนคูคาพิทยาสรรพ์ ตำบลคูคา อำเภอลำดวน จังหวัดขอนแก่น เป็นโรงเรียนต้นแบบที่ใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดภายใต้การดูแลของศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น มาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2549 โดยระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 และประถมศึกษาปีที่ 4 เป็นชั้นที่เริ่มต้นในปีแรกและในปีต่อๆ มาได้ขยายจนครบตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และมีการรับนักศึกษาฝึกปฏิบัติการสอนในสถานศึกษาที่สอนโดยใช้วัตกรรมการศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดอย่างต่อเนื่อง รวมระยะเวลาที่โรงเรียนดำเนินการจัดการเรียนการสอนด้วยนวัตกรรมดังกล่าวเป็นเวลากว่า 15 ปี

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยได้แบ่งการเก็บรวบรวมข้อมูลออกเป็น 2 ช่วง คือ การดำเนินการก่อนเก็บรวบรวมข้อมูลและการดำเนินการขณะเก็บรวบรวมข้อมูล ดังต่อไปนี้

- การดำเนินการก่อนเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยได้เข้าไปศึกษาบริบทโรงเรียน สังเกตพฤติกรรมการเรียนของนักเรียนแต่ละคน ร่วมเขียนแผนการจัดการเรียนรู้ สังเกตชั้นเรียนและสะท้อนผลบทเรียน พร้อมทั้งจัดบรรยากาศการเรียนการสอน ตั้งกล้องวิดีโอ บันทึกภาพ ถ่ายภาพนิ่ง และบันทึกเสียง เพื่อให้ให้นักเรียนคุ้นเคยกับบรรยากาศในการเก็บข้อมูลผู้วิจัย จำนวน 1 หน่วย สาระการเรียนรู้

- การดำเนินการขณะเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการเก็บข้อมูล โดยทำการสอนด้วยวิธีการแบบเปิดภายใต้กระบวนการศึกษาชั้นเรียน ประกอบด้วย 3 ขั้นตอนที่สำคัญ คือ การร่วมสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ การร่วมสังเกตชั้นเรียน และการร่วมสะท้อนผลหลังการสอนของแต่ละคาบเรียน โดยมีรายละเอียด ดังนี้

(1) ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยร่วมกันวางแผนและสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง รูปสามเหลี่ยม รวมทั้งหมด 5 แผนการจัดการเรียนรู้

(2) ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยหนึ่งในสมาชิกของทีมการศึกษาชั้นเรียนได้ทำหน้าที่เป็นครูผู้สอนซึ่งผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยได้ทำหน้าที่สังเกตและบันทึกการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน โดยไม่มีการเข้าไปแทรกแซงการดำเนินการสอนของครูผู้สอน โดยอาศัยแบบบันทึกการสังเกตที่ได้จากผลงานเขียนของนักเรียนและวีดิทัศน์ชั้นเรียน

(3) ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยสะท้อนผลบทเรียนหลังจากการสอนร่วมกันทุกครั้งเกี่ยวกับการบรรลุวัตถุประสงค์ในแต่ละคาบเรียนและการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในระหว่างการแก้ปัญหาของนักเรียน รวมไปถึงแนวทางในการพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ในคาบถัดไป

การวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยนี้ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพเพื่อวิเคราะห์การอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนโดยใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดซึ่งมีวิธีการเก็บรวบรวมข้อมูลจากการสังเกต การเข้าไปอยู่ในบริบทจริงในชั้นเรียนและการวิเคราะห์ข้อมูลจากโพโตคอลที่ได้จากการถอดความคำพูดและพฤติกรรมในการแก้ปัญหาจากการบันทึกวีดิทัศน์ เทปบันทึกเสียง การบันทึกภาคสนาม และผลงานเขียนของนักเรียนในชั้นเรียน เพื่อนำมาบรรยายเชิงวิเคราะห์ตามกรอบแนวคิดของ CCSS (2010) โดยมีขั้นตอนการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

(1) ร่วมกันวิเคราะห์ ลำดับกิจกรรมการสอนจากหนังสือเรียน (Collaborative Plan) เป็นขั้นตอนแรกของการศึกษาชั้นเรียน เป็นการทำงานร่วมกันของทีมวิจัย โดยเริ่มจากกำหนดเป้าหมายของคาบเรียน ออกแบบ สถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้ปัญหาปลายเปิด ออกแบบสื่อการสอน วิเคราะห์เนื้อหา ที่ต้องการให้นักเรียนเรียนรู้ กำหนดวัตถุประสงค์ของคาบเรียน คาดการณ์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยมีรายละเอียดของแผนการจัดการเรียนรู้ มีดังนี้

- เป้าหมายของบทเรียน คือ นักเรียนสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมจากอุปกรณ์ที่กำหนดให้ได้ นักเรียนสามารถบอกลักษณะและส่วนประกอบของรูปสามเหลี่ยมได้ และ นักเรียนสามารถจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมโดยใช้ลักษณะที่คล้ายคลึงกันได้

- สารสำคัญ คือ (1) รูปสามเหลี่ยมที่แตกต่างกันเป็นอย่างไร (2) นักเรียนมีวิธีการจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายคลึงกันอย่างไร

- สื่อการเรียนการสอน ประกอบด้วย หลอด 4 สี สีละ 15 หลอด (ต่อกลุ่ม) ซึ่งแต่ละสีมีขนาดที่แตกต่างกัน ดังนี้ หลอดสีเขียว ยาว 12 เซนติเมตร หลอดสีแดง ยาว 10 เซนติเมตร หลอดสีเหลือง ยาว 8 เซนติเมตร หลอดสีน้ำเงิน ยาว 6 เซนติเมตร ตัวเชื่อมต่อหลอด (ลวดก้ามหอย) กลุ่มละ 60 อัน ฟิวเจอร์บอร์ดสำหรับปักหมุดห้อยรูปสามเหลี่ยม ใบกิจกรรมกลุ่ม แถบสถานการณ์ปัญหาและแถบคำสั่ง

<p>หน่วยการเรียนรู้ที่ 7 คาบ 1/9</p> <p>กิจกรรมเรื่อง : มาสร้างสามเหลี่ยมกันเถอะ</p> <p>สถานการณ์ปัญหา : ครูมีหลอดให้นักเรียน 4 สี สีละ 15 อัน</p> <p>คำสั่ง : 1. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมที่แตกต่างกัน จากหลอด 3 หลอด</p> <p>2. ให้นักเรียนจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้น</p> <p>นักเรียนจัดได้กี่กลุ่ม อะไรบ้างพร้อมอธิบายเหตุผลในการจัดกลุ่ม</p>		
---	--	--

- การคาดการณ์แนวคิดนักเรียน (1) จัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมโดยใช้สีของหลอด แบ่งได้ 3 ชนิด คือ กลุ่มที่ 1 ใช้หลอดสีเขียวกันเป็นด้านของรูปสามเหลี่ยม 2 ด้าน กลุ่มที่ 2 ใช้หลอดสีเขียวกันเป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 ด้าน และกลุ่มที่ 3 ใช้หลอดคละสีกัน (2) จัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมโดยใช้ความยาวของหลอด แบ่งได้ 3 ชนิด คือ กลุ่มที่ 1 มีความยาวของหลอดเท่ากัน 2 ด้าน กลุ่มที่ 2 มีความยาวหลอดเท่ากันทุกด้าน และกลุ่มที่ 3 มีความยาวหลอดทุกด้านไม่เท่ากัน (3) จัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมโดยสังเกตจากฐานเวลาปักหมุด แบ่งได้ 2 ชนิด คือ กลุ่มที่ 1 เมื่อปักหมุดแล้วฐานอยู่ในแนวนอน และกลุ่มที่ 2 เมื่อปักหมุดแล้วฐานเอียง (4) จัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยมโดยสังเกตจากมุมในการปักหมุด แบ่งได้ 3 ชนิด คือ กลุ่มที่ 1 เมื่อปักหมุดที่มีมุมใดมุมหนึ่งแล้วฐานอยู่ในแนวนอนเสมอไม่เอียง กลุ่มที่ 2 เมื่อปักหมุดจะมีเพียงมุมเดียวที่ทำให้ฐานไม่เอียง และกลุ่มที่ 3 เมื่อปักหมุดทุกมุมแล้วรูปสามเหลี่ยมเองเสมอ

(2) ร่วมมือกันสังเกตการสอนรายคาบในแต่ละสัปดาห์ (Collaborative Do) ทีมวิจัยนำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ใช้วิธีการแบบเปิดไปใช้ในการสอนและร่วมสังเกตการสอนร่วมกัน โดยผู้วิจัย ผู้ช่วยวิจัย คอยสังเกตพฤติกรรม การแก้ปัญหาของนักเรียน โดยเน้นไปที่การอภิปรายโต้แย้งของนักเรียน และแนวคิดที่เกิดขึ้นในชั้น โดยมีรายละเอียดการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามวิธีการแบบเปิด ดังนี้

ขั้นที่ 1 การนำเสนอปัญหาปลายเปิด

เริ่มการเรียนการสอนด้วยการทำความเข้าใจรูปสามเหลี่ยมและให้นักเรียนได้ลองสร้างรูปสามเหลี่ยมที่แตกต่างกันด้วยตนเอง โดยให้นักเรียนได้มีโอกาสหยิบจับในภาคปฏิบัติเพื่อให้นักเรียนทุกคนสามารถเข้าร่วมได้ โดยครูพยายามเน้นย้ำนักเรียนว่ารูปสามเหลี่ยมที่สร้างต้องไม่ซ้ำกัน เพื่อให้นักเรียนได้เก็บ ไปสร้างเป็นประเด็นในการอภิปรายโต้แย้งในกลุ่มต่อไป

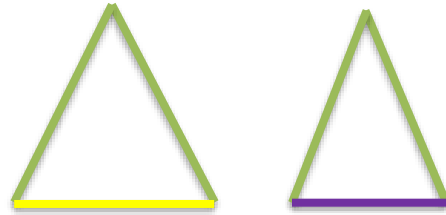


ขั้นที่ 2 การเรียนรู้ด้วยตนเองผ่านการแก้ปัญหา

นักเรียนแต่ละกลุ่มกระตือรือร้นที่จะสร้างรูปสามเหลี่ยมให้ได้แตกต่างกัน โดยแต่ละกลุ่มต่างก็มีเหตุผลในการสร้างและให้คำจำกัดความของคำว่าไม่ซ้ำที่แตกต่างกันไป (คำสั่งที่ 1) ต่อมาครูให้แต่ละกลุ่มจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยม (คำสั่งที่ 2) สมาชิกในกลุ่มต่างก็มีความคิดที่แตกต่างกันไป แต่ท้ายที่สุดก็มีแนวคิดหลักของแต่ละกลุ่มที่สมาชิกภายในกลุ่มยอมรับ โดยจะให้นักเรียนได้ให้เหตุผลตามความรู้สึก โดยไม่ได้ระบุว่าแนวคิดใดถูกหรือแนวคิดใดผิด โดยสามารถวิเคราะห์ผลการอภิปรายโต้แย้งได้ ดังโพรโตคอลต่อไปนี้

Item 54	นักเรียน 1	<u>มันซ้ำกัน</u> [หยิบเทียบกับสามเหลี่ยมของตนเอง (เขียว เขียว เหลือง)]
Item 55	นักเรียน 2	<u>มันไม่ซ้ำอันนี้มันสีเหลือง อันนี้มันเป็นสีม่วง (เขียว เขียว ม่วง)</u>
Item 56	นักเรียน 1	<u>แบบมันนะแหม</u>
Item 57	นักเรียน 2	<u>[พยักหน้ายอมรับ]</u>

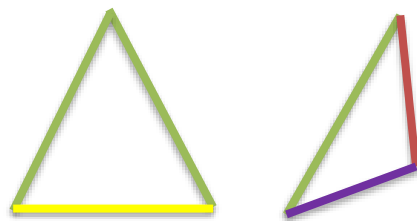
จากโพรโตคอลดังกล่าวจะเห็นได้ว่านักเรียนทั้ง 2 คน มีการถกเถียงกันถึงรูปสามเหลี่ยมที่สร้างจากหลอดว่ารูปใดบ้างที่ซ้ำกัน จาก Item 54 และ Item 56 นักเรียนคนที่ 1 ยืนยันว่ารูปสามเหลี่ยมสีเขียว เขียว เหลืองซ้ำกันกับรูปสามเหลี่ยมสีเขียว เขียว ม่วง โดยให้เหตุผลสนับสนุนว่ามีแบบที่คล้ายกัน ซึ่งด้วยข้อสนับสนุนนี้ทำให้นักเรียนคนที่ 2 ยอมรับข้อโต้แย้ง [จากพฤติกรรมพยักหน้า]



ภาพประกอบ Item 54-Item 57

- | | | |
|---------|------------|--|
| Item 58 | นักเรียน 3 | [หีบรูรูปสามเหลี่ยมสีเขียว ม่วง แดง เทียบกับสามเหลี่ยมสีเขียว เขียว เหลือง ให้นักเรียน 1 ดู] |
| Item 59 | นักเรียน 1 | <u>มันซ้ำกัน (มีสีเหมือนกัน)</u> |
| Item 60 | นักเรียน 3 | <u>มันไม่ซ้ำกัน</u> |
| Item 61 | นักเรียน 3 | <u>นี่แหลม! มันบ่ต่อกัน</u> |
| Item 62 | นักเรียน 1 | [หีบมาเทียบกับรูปสามเหลี่ยมเดิม] เออ! <u>มันบ่ซ้ำกัน</u> |

จาก Item 58 นักเรียนคนที่ 3 พยายามยืนยันโดยการเทียบว่ารูปสามเหลี่ยมสีเขียว ม่วง แดง กับรูปสามเหลี่ยมสีเขียว เขียว เหลือง ไม่ซ้ำกัน แต่นักเรียนคนที่ 1 ก็ยังคงยืนยันว่ามันซ้ำกัน โดยให้เหตุผลสนับสนุนว่ามีสีที่เหมือนกัน (สีเขียว) แต่นักเรียนคนที่ 3 ก็ยังคงยืนยันว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปแตกต่างกัน จนกระทั่งนักเรียนคนที่ 1 ได้ลองหีบรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมาเปรียบเทียบด้วยตนเองจึงยอมรับข้อโต้แย้งนี้



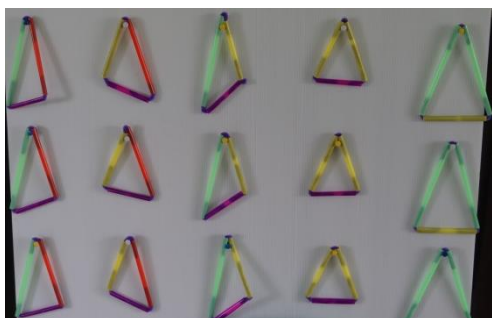
ภาพประกอบ Item 58-Item 62

จากโพโตคอลในชั้นการเรียนรู้ด้วยตนเองผ่านการแก้ปัญหา จะเห็นได้ว่านักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 สร้างข้อโต้แย้งและสนับสนุนข้อโต้แย้งโดยใช้วัตถุ ภาพวาด แผนผังและการกระทำ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในลักษณะที่นักเรียนมีโอกาสได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นร่วมกัน มีการถกเถียงปัญหาที่เกี่ยวกับกิจกรรมที่ทำ มีการช่วยเหลือซึ่งกันทั้งสองฝ่าย ย่อมส่งผลต่อกระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน

ขั้นที่ 3 การอภิปรายเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้น

ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มได้ออกมานำเสนอแนวคิดหน้าชั้นเรียน ซึ่งครูได้ขยายแนวคิดของนักเรียนแต่ละกลุ่มอีกครั้งเพื่อให้นักเรียนภายในห้องได้เห็นและเข้าใจตรงกัน และครูก็จะมีคำถามเพื่อที่กระตุ้นให้นักเรียนในชั้นเรียนทุกคนได้มีโอกาสเรียนรู้ร่วมกับเพื่อนกลุ่มที่ออกมานำเสนอ โดยมีโพโตคอลที่แสดงการอภิปรายโต้แย้ง ดังนี้

- Item 122 ครู ที่นี่ฟังเพื่อนนะ อ๊ะ! ช่วยอธิบายให้ฟังหน่อยนะว่าเราจัดกลุ่มได้
ก็กลุ่ม แล้ววิธีการในการจัดกลุ่มเป็นอย่างไร
- Item 123 นักเรียน กลุ่มที่ 1 สีเขียว สีแดง สีม่วง (แถวที่ 1) กลุ่มที่ 2 สีแดง สีเหลือง
สีม่วง (แถวที่ 2) กลุ่มที่ 3 สีเขียว สีเหลือง สีม่วง (แถวที่ 3) กลุ่มที่ 4
สีเหลือง สีเหลือง สีม่วง (แถวที่ 4) กลุ่มที่ 5 สีเขียว สีเขียว
สีเหลือง (แถวที่ 5)
- Item 124 นักเรียน แต่มันซ้ำกัน
- Item 125 ครู เดี๋ยวนะๆ เมื่อกี้เพื่อนเค้าบอกว่า ในแต่ละกลุ่มมันเป็นยังไงกัน
- Item 126 นักเรียน มันเป็นสีเดียวกัน นี่ไงคะ (เอามือชี้ไปที่รูปสามเหลี่ยมในแถวที่ 1)



ภาพประกอบ Item 122



ภาพประกอบ Item 125

จาก Item 123 กลุ่มนำเสนอได้ยืนยันแนวคิดของตนเอง แต่ Item 124 ได้แสดงให้เห็นว่ามีการขัดแย้งของข้อมูลดังกล่าว โดยมีการสร้างข้อสนับสนุนเพื่อชี้แจงข้อกล่าวอ้างของตนเองและสื่อสารกับคนอื่นๆด้วย Item 126

ขั้นที่ 4 สรุปโดยเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นของนักเรียน

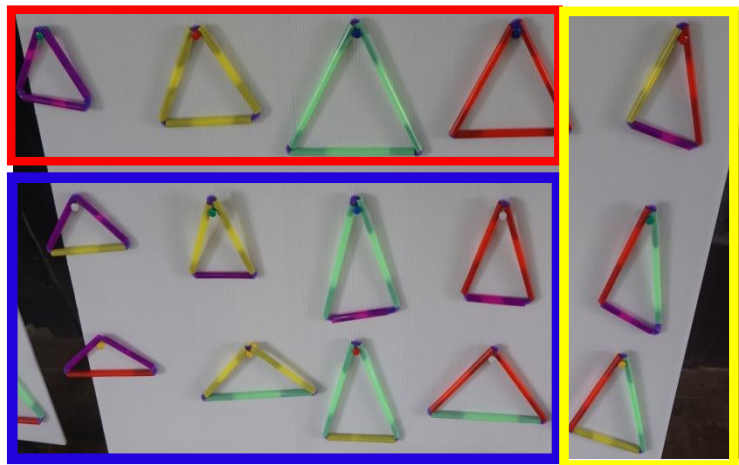
ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการจัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน โดยให้นักเรียนตอบและเขียนตามภาษาของนักเรียนแล้วจึงปรับมาเป็นภาษาที่ทุกคนจะเข้าใจตรงกัน โดยในชั้นเรียนนักเรียนสามารถจัดกลุ่มรูปสามเหลี่ยม โดยแบ่งกลุ่มตามจำนวนสี ซึ่งจะแบ่งได้ทั้งหมด 3 กลุ่ม กลุ่มแรกรูปสามเหลี่ยมสร้างจากหลอด 1 สี กลุ่มที่สองรูปสามเหลี่ยมสร้างจากหลอด 2 สีที่แตกต่างกัน และกลุ่มที่มี 3 รูปสามเหลี่ยมสร้างจากหลอด 3 สีที่แตกต่างกัน ในชั้นเรียนนักเรียนยังได้ข้อสรุปความสัมพันธ์ของสี ฐานและแขนของรูปสามเหลี่ยม ดังโพรโตคอลต่อไปนี้

- Item 265 ครู เมื่อกี้เราคุยประเภทนี้ไปแล้ว ประเภท 2 สี ที่นี่ ถ้าประเภท 3 สี ละ
- Item 266 นักเรียน ประเภท 3 สี มันทำยังไงก็ไม่ตรง
- Item 267 ครู ประเภท 3 สี มันทำยังไงก็ไม่ตรง อ๊ะ! จริงรีเปลา ไหนลองทำให้ดูสิ
- Item 268 นักเรียน เพราะว่าแขนของมุมมีขนาดไม่เท่ากัน
- Item 269 นักเรียน มันจะฐานมันจะไม่เท่ากัน
- Item 270 นักเรียน แขนไม่ตรง

จากโปรโตคอลดังกล่าวจะเห็นว่านักเรียนสามารถสรุปโดยเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นของนักเรียนจากชั้นเรียน มีการเรียนรู้ร่วมกันจนกระทั่งได้ความคิดที่สามารถแบ่งปันหรือเข้าร่วมกันได้ และพัฒนาแนวคิดทางคณิตศาสตร์จากข้อโต้แย้งในชั้นเรียนทำให้กลายเป็นหลักเกณฑ์ทั่วไป ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

- | | | |
|----------|----------|---|
| Item 275 | ครู | สรุปว่าวันนี้ แต่ละกลุ่มทำเหมือนกันไหม |
| Item 276 | นักเรียน | ไม่ |
| Item 277 | ครู | ไม่เหมือนกันเลย เราได้เรียนรู้หลายๆ แบบจากพวกนี้เลย อ๊ะ! เดี่ยวช่วยสรุปจากสิ่งที่เราได้ ให้ครูฟัง |
| Item 278 | นักเรียน | <u>1 สี แขนวยังไงฐานมันก็ตรงกัน</u> |
| Item 279 | นักเรียน | <u>ถ้าแขนเท่ากันฐานมันก็จะตรง</u> |
| Item 280 | นักเรียน | <u>ถ้าแขนไม่เท่ากัน ฐานมันก็จะเบี้ยว</u> |
| Item 281 | นักเรียน | <u>ถ้าแขนกับฐานเท่ากัน แขนวยังไงก็ตรง</u> |
| Item 282 | นักเรียน | <u>ถ้าหลอดสีเดียวหมุนยังไงก็เท่ากัน</u> |
| Item 283 | นักเรียน | <u>ถ้า 3 สี แขนก็คนละขนาดกัน ฐานก็คนละขนาดกัน</u> |
| Item 284 | ครู | สรุปว่าวันนี้ทั้งวันเพื่อนเค้าทำมาก็แบบ |
| Item 285 | นักเรียน | แบบซ้ากันสีเหมือนกัน |
| Item 286 | นักเรียน | แยกได้ 3 กลุ่ม กลุ่มหนึ่งจะเป็นสีเดียวกัน กลุ่มหนึ่งจะมี 2 สีที่เหมือนกัน และที่สามเป็น 3 สี |

กลุ่มที่ 1 รูปสามเหลี่ยมที่มี 1 สี มีขนาดแขนเท่ากัน แขนวยังไงฐานก็ตรง



กลุ่มที่ 2 รูปสามเหลี่ยมที่มี 2 สี ถ้ามีขนาดแขนเท่ากัน ฐานก็จะตรง



กลุ่มที่ 3 รูปสามเหลี่ยมที่มี 3 สี มีขนาดแขนคนละขนาด แขนไม่เท่ากัน ฐานจะเบี้ยว



(3) ร่วมมือกันสะท้อนผลการสอนรายสัปดาห์ (Collaborative See) หลังจากการสอนและการสังเกตการสอนร่วมกัน ทีมวิจัยได้ร่วมกัน สะท้อนผล โดยมีลำดับการสะท้อนผล คือ ครูผู้สอน (นักศึกษปฏิบัติการสอนในสถานศึกษา) ผู้วิจัย ผู้ช่วยวิจัยคนที่ 1 และผู้ช่วยวิจัยคนที่ 2 โดยมีประเด็นการสะท้อนผล ดังนี้ (1) การบรรลุวัตถุประสงค์ในคาบเรียน (2) ประเด็นวิจัยและแนวคิดที่เกิดขึ้นในคาบเรียน (3) ปัญหาที่เกิดขึ้นและแนวทางการแก้ไขปัญหา

ผลการวิจัย

จากการวิเคราะห์ข้อมูลการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด ซึ่งผู้วิจัยได้เริ่มวิเคราะห์ตั้งแต่ขั้นตอนของการศึกษาชั้นเรียนตลอดจนวิธีการแบบเปิด ประกอบกับข้อมูลการบันทึกวีดิทัศน์ และข้อมูลจากการสะท้อนผล สรุปได้ว่าชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิดส่งเสริมให้นักเรียนแสดงการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ออกมาได้อย่างชัดเจน โดยนักเรียนสามารถสร้างการอภิปรายโต้แย้งและวิจารณ์เหตุผลของผู้อื่นได้ เข้าใจและใช้สมมติฐาน/ความรู้ที่มีก่อนหน้านี้ในการสร้างข้อโต้แย้ง สามารถสร้างการคาดเดาและสร้างข้อสนับสนุนของข้อกล่าวอ้างเพื่อสำรวจความจริงของการคาดคะเนของตนเอง วิเคราะห์สถานการณ์ด้วยการจำแนกเป็นกรณี ใช้การยกตัวอย่างค้าน (counterexample) ชี้แจงข้อสรุปของตนเองสื่อสารกับคนอื่น ๆ และตอบข้อโต้แย้งของผู้อื่นได้ ซึ่งนักเรียนชั้นประถมศึกษา มักสร้างข้อโต้แย้งโดยใช้วัตถุ ภาพวาด แผนผังและการกระทำ มักเป็นข้อโต้แย้งที่ไม่เป็นทางการนัก ไปจนถึงข้อโต้แย้งที่เป็นทางการที่สามารถนำเสนอสูตร กฎ หรือนิยามทางคณิตศาสตร์มายืนยันข้อคาดการณ์ นักเรียนสามารถฟังหรืออ่านข้อโต้แย้งของผู้อื่นและตัดสินใจได้ว่าเป็นข้อโต้แย้งที่เหมาะสมหรือไม่ และถามคำถามที่เป็นประโยชน์เพื่อชี้แจงหรือปรับปรุงข้อโต้แย้งร่วมกัน

อภิปรายและสรุปผลการวิจัย

จากการวิเคราะห์ข้อมูลการอภิปรายโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด พบว่าขั้นที่ 1 ขั้นการนำเสนอปัญหาหลายเปิด การอภิปรายโต้แย้งที่พบเป็นการนำความรู้ที่มีก่อนหน้านี้มาสนับสนุนข้อกล่าวอ้างที่ครูจะใช้นำเข้าสู่สถานการณ์ปัญหา ขั้นที่ 2 ชั้นเรียนรู้ด้วยตนเองผ่านการแก้ปัญหา เป็นขั้นที่นักเรียนได้แก้ปัญหาด้วยตนเองและมีการสนทนาภายในกลุ่มและเกิดการอภิปรายโต้แย้งมากที่สุด ขั้นที่ 3 ชั้นอภิปรายและเปรียบเทียบร่วมกันทั้งชั้นเรียน ก็เป็นอีกขั้นหนึ่งที่มีความสำคัญซึ่งจะทำให้นักเรียนทั้งชั้นเรียนได้เกิดความเข้าใจร่วมกันจากแนวคิดที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนโดยสิ่งสำคัญอยู่ที่การยอมรับความคิดเห็นที่แตกต่างกัน โต้แย้งด้วยเหตุผลจนกระทั่งได้แนวคิดที่สามารถแบ่งปันหรือเข้าร่วมกันได้และพัฒนาเป็นหลักเกณฑ์ทั่วไปทางคณิตศาสตร์ (Generalization) และขั้นที่ 4 ชั้นสรุปเชื่อมโยงแนวคิดที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนของนักเรียน มีการเรียนรู้ร่วมกัน ไปจนนำไปสู่แนวคิดที่มีความเป็นนามธรรมทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปแบบแนวคิดที่เป็นกฎ สูตร การดำเนินการ ทางคณิตศาสตร์ ฯลฯ

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา (Center for Research in Mathematics Education, Khon Kaen University) ศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ (Centre of Excellence in Mathematics) และโครงการพัฒนาการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในเขตพื้นที่ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ

เอกสารอ้างอิง

- คณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2560). ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลางกลุ่มสาระคณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และคณะ. (2546). การปฏิรูปกระบวนการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนโดยเน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์. ขอนแก่น: ขอนแก่นการพิมพ์.



- ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์. (2557). กระบวนการแก้ปัญหาในคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน. ขอนแก่น: ศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- Alexandre, M.P. & Erduran, S. (2007). Argumentation in Science Education: An overview. Argumentation in science education. Voorburg, The Netherlands: Springer.
- Common Core state standards initiative. (2010). COMMON CORE STATE STANDARDS FOR Mathematics. [n.p.
- Driver, R., Newton, P., & Osborne, J. (2000). Establishing the norms of scientific argumentation in classrooms. Science Education.
- Inprasitha, M. (2011). One feature of adaptive lesson study in Thailand: Designing learning unit. Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia.
- Lam, T.T. (2012). Reason Communication and Connection in Mathematics: Reasoning and Justification in the secondary Mathematics Classroom. Singapore: World Scientific; 2012.
- Langrall, Cynthia W. & Rumsey, Chepina. Teaching Children Mathematics. (2016). PROMOTING MATHEMATICAL ARGUMENTATION. NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics, NCTM. (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, Virginia: NCTM.
- OECD. (2003). Learning for Tomorrow's World: First Result from PISA 2003. Paris.
- Seiguchi, Y. (2002). Mathematical Proof, Argumentation, and Classroom Communication: From a Cultural Perspective. Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics. Vol.21.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The Teaching Gap: Best Ideas from the world's Teachers for Improving Education in the Classroom. New York: The Free Press.; 1999.