

แบบจำลองทางวิสโคอีลาสติกของเส้นเอ็นข้อต่อในวัยเจริญเติบโต

A Viscoelastic Model of Ligaments and Tendons in the Growth Ages

จิราภา เลื่อนกานวี (Jirapa Luagnaree)* ดร.รัชดา โสภาคะยัง (Dr.Ratchada Sopakayang)**

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาและทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้างภายในของเส้นเอ็นข้อต่อในวัยเจริญเติบโต จึงได้สร้างแบบจำลองทางวิสโคอีลาสติกที่ส่วนประกอบของแบบจำลองเลียนแบบพฤติกรรมเชิงโครงสร้างภายในของเส้นเอ็นข้อต่อเมื่ออายุแตกต่างกันในวัยเจริญเติบโต โดยมีสมมติฐานว่าเมื่อเส้นเอ็นเริ่มรับแรงดึง เส้นไฟบิวร์ที่อยู่ภายในเส้นเอ็นจะมีบางส่วนที่เริ่มรับแรงในขณะที่บางส่วนจะเริ่มขาด โดยจำนวนของเส้นไฟบิวร์ที่รับแรงและขาดจะเป็นไปตามฟังก์ชันการกระจายตัวแบบเอ็กโปเนนเชียล และเมื่อเส้นเอ็นมีอายุมากขึ้นพื้นที่หน้าตัดของเส้นไฟบิวร์จะมีขนาดใหญ่ขึ้นซึ่งจะส่งผลให้เส้นไฟบิวร์มีความแข็งแรงมากขึ้นด้วย โดยการเพิ่มขึ้นของพื้นที่หน้าตัดของไฟบิวร์นี้จะสูงขึ้นตามอายุของเส้นเอ็นในลักษณะฟังก์ชันแบบเอ็กโปเนนเชียล แบบจำลองที่สร้างขึ้นสามารถจำลองพฤติกรรมเชิงกลของเส้นเอ็นที่อายุแตกต่างกันขณะรับแรงดึงและคลายความเค้นได้เป็นอย่างดี ซึ่งผลการคำนวณที่ได้จากแบบจำลองมีความสอดคล้องกับผลการทดลองจากงานวิจัยอ้างอิง องค์ความรู้ที่ได้จากงานวิจัยจะนำไปสู่การเพิ่มศักยภาพการผลิตวัสดุทดแทนเส้นเอ็นข้อต่อได้ให้ประสิทธิภาพสูงขึ้น รวมถึงช่วยป้องกันการเกิดความเสียหายแก่เส้นเอ็นข้อต่อในวัยต่าง ๆ ได้

ABSTRACT

This research aims to study and understand the structural changes of ligaments and tendons in the growth ages. Therefore, a new viscoelastic model is formulated by accounting for the structural changes of ligaments and tendons in different ages during the growth ages. By mimicking the physiology of the structural changes, some collagen fibrils would gradually become active while some would gradually start to fail under tension. The exponential distribution functions are presented in order to describe the distribution of the number of the active and broken fibrils. When the ligaments and tendons are older, the cross sectional area of the fibrils would be larger and stronger. The increasing of the cross sectional area of the fibrils is proportional to the ages of the ligaments and tendons as an exponential function. The formulated model can describe well the mechanical behavior of ligaments and tendons in different ages under tension and stress relaxation phenomena. The calculation results obtained from the model are consistent with the experimental results from the published papers. The knowledge can be applied to improve the quality of the substitution of ligaments and tendons effectively. Moreover, it can help in preventing the damage in ligaments and tendons in different ages.

คำสำคัญ: เส้นเอ็นข้อต่อ แบบจำลองทางวิสโคอีลาสติก วัยเจริญเติบโต

Keywords: Ligaments and tendons, Viscoelastic model, Growth ages

* นักศึกษา หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

** ผู้ช่วยศาสตราจารย์ สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยอุบลราชธานี

บทนำ

เส้นเอ็นข้อต่อเป็นอวัยวะภายในที่สำคัญอย่างยิ่งในร่างกายนมนุษย์ โดยเส้นเอ็นมีหน้าที่ในการเชื่อมโยงและถ่ายโอนแรงระหว่างกระดูกกับกระดูกที่บริเวณข้อต่อต่าง ๆ ซึ่งเรียกว่า ligaments และกระดูกกับกล้ามเนื้อ ซึ่งเรียกว่า tendons โดยการเคลื่อนไหวร่างกายในการทำกิจกรรมต่าง ๆ เช่น การกระโดด การยืดขา การเล่นกีฬาจะส่งผลให้เส้นเอ็นข้อต่อเกิดการรับแรงหรือยืดหยุ่นตลอดเวลา และอาจจะนำไปสู่การฉีกขาดของเส้นเอ็นข้อต่อได้ จากรายงานการวิจัยของสหรัฐอเมริกาได้สำรวจผู้ป่วยที่เข้ารับการรักษาทั้งหมดจำนวน 20,086,126 คน พบว่าเป็นโรคเกี่ยวกับเส้นเอ็นฉีกขาด จำนวน 21,305 คน เส้นเอ็นอักเสบจำนวน 180,421 คน และเส้นเอ็นอักเสบแล้วฉีกขาด จำนวน 7,232 คน (Youichi et al., 2017) ซึ่งส่วนมากมีสาเหตุการบาดเจ็บอันเนื่องมาจากการเล่นกีฬาและอุบัติเหตุและผู้ป่วยส่วนใหญ่มักอยู่ในวัยเจริญเติบโต ดังนั้นความต้องการในการใช้วัสดุเทียมหรือวัสดุทดแทนเส้นเอ็นที่มีคุณภาพ เพื่อรองรับต่อจำนวนผู้ป่วยในวัยเจริญเติบโต จึงมีความสำคัญโดยการผลิตเส้นเอ็นเทียมเหล่านี้จำเป็นต้องมีความรู้เกี่ยวกับคุณลักษณะเชิงกลและเชิงกายภาพของเส้นเอ็นข้อต่อในอายุที่แตกต่างกันในวัยเจริญเติบโต จึงจะสามารถผลิตเส้นเอ็นเทียมสำหรับผู้ป่วยในวัยนี้ได้อย่างเหมาะสม ปกติโครงสร้างภายในของเส้นเอ็นจะประกอบไปด้วยไฟเบอร์จำนวนมากเรียงตัวอยู่ในแนวเดียวกัน โดยที่ไฟเบอร์เหล่านี้ถูกล้อมรอบไปด้วยเมทริกซ์ซึ่งประกอบไปด้วยน้ำและไขมัน เป็นต้น โดยไฟเบอร์แต่ละเส้นจะเกิดจากการรวมตัวกันของไฟบิวร์จำนวนมากเรียงตัวไปในแนวเดียวกัน ในขณะที่ไฟบิวร์จะประกอบไปด้วยไมโคร-ไฟบิวร์รวมตัวกันและไมโคร-ไฟบิวร์จะประกอบไปด้วยโมเลกุลของโคลาเจน (Spiesz et al., 2015) จากงานวิจัยที่ผ่านมาพบว่าส่วนมากจะศึกษาพฤติกรรมเชิงกลของเส้นเอ็นข้อต่อขณะรับแรงแบบต่างๆ โดยไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงเชิงกลและเชิงโครงสร้างภายในของเส้นเอ็นที่อายุแตกต่างกัน ซึ่งคุณลักษณะเชิงกลและทางกายภาพของเส้นเอ็นข้อต่อจะเปลี่ยนไปในช่วงอายุในวัยเจริญเติบโต อย่างไรก็ตามองค์ความรู้เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้างที่เกิดขึ้นในเส้นเอ็นข้อต่อเมื่อเส้นเอ็นอายุมากขึ้นยังไม่ชัดเจน โดยงานวิจัยบางส่วนได้นำเสนอว่า เมื่อเส้นเอ็นมีอายุมากขึ้นจะเกิดพันธะเชื่อมต้อ (cross-links) ระหว่างคอลลาเจนไฟบิวร์ (collagen fibrils) ภายในเส้นเอ็นข้อต่อเพิ่มขึ้น (Goh et al., 2008; Johannes et al., 2013; Gion et al., 2012) ในขณะที่เมื่อร่างกายแก่ตัวลงเข้าสู่วัยถดถอยความแข็งแรงของเส้นเอ็นจะมีค่าลดลงด้วย (A.Nedergaard et al., 2013; Kuroda et al., 1988; Kamel, H.K., 2003) งานวิจัยบางส่วนได้นำเสนอว่าเมื่อเส้นเอ็นมีอายุมากขึ้นพื้นที่หน้าตัดของไฟบิวร์ที่อยู่ภายในเส้นเอ็นจะมีขนาดใหญ่ขึ้นด้วย จึงส่งผลให้เส้นเอ็นมีความแข็งแรงมากขึ้น (Goh et al., 2008) และเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุแตกต่างกันจะมีค่าความแข็งแรงของเส้นเอ็นต่างกัน (Rita et al., 2017; Thomas et al., 2010; Rene et al., 2018; Andrew et al., 2013; Gladius n.d.;Fabrício et al., 2017; M.R. Dressler et al., 2006; G.L. Onambele-Pearson et al., 2012; Bailey et al.,1998) นอกจากนี้งานวิจัยส่วนใหญ่ได้สร้างแบบจำลองที่ใช้อธิบายพฤติกรรมของเส้นเอ็นข้อต่อในรูปแบบต่าง ๆ แต่ยังไม่ได้อธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงทางโครงสร้างภายในที่เปลี่ยนไปเมื่อเส้นเอ็นอายุแตกต่างกัน (Ratchada, Raffaella , 2011; C. Machiraju et al., 2006; Shearer, 2015; Abramowitch et al., 2004; Ratchada, 2013; Tom, 2015) ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาและทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้างภายในและพฤติกรรมเชิงกลของเส้นเอ็นข้อต่อที่มีอายุมากขึ้นในวัยเจริญเติบโต โดยการสร้างแบบจำลองทางวิศโคอิลาสติกที่สัมพันธ์โดยตรงกับโครงสร้างภายในของเส้นเอ็นข้อต่อที่มีอายุแตกต่างกันในวัยเจริญเติบโต ซึ่งองค์ความรู้ที่ได้จากงานวิจัยนี้จะนำไปสู่ความเข้าใจถึงการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้างภายในและพฤติกรรมเชิงกลของเส้นเอ็นข้อต่อในวัยเจริญเติบโต และนำไปสู่การผลิตวัสดุทดแทนเส้นเอ็นข้อต่อสำหรับผู้ป่วยที่มีอายุแตกต่างกันได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมถึงยังช่วยป้องกันการเกิดความเสียหายแก่เส้นเอ็นในวัยต่าง ๆ ได้

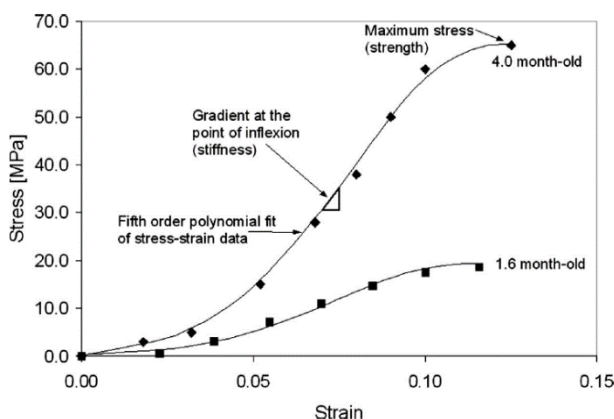
วัตถุประสงค์การวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาและทำความเข้าใจการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้างภายในและพฤติกรรมเชิงกลของเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุมากขึ้นในวัยเจริญเติบโตโดยการสร้างแบบจำลองทางวิสโคอีลาสติกที่สัมพันธ์โดยตรงกับโครงสร้างภายในของเส้นเอ็นข้อต่อที่มีอายุแตกต่างกันในวัยเจริญเติบโตและสามารถอธิบายพฤติกรรมเชิงกลที่สอดคล้องกับการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้าง เมื่อเส้นเอ็นมีอายุมากขึ้นในช่วงวัยเจริญเติบโตได้

วิธีการวิจัย

แบบจำลองของการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้างกับอายุของเส้นเอ็นข้อต่อ

งานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองของการเปลี่ยนแปลงลักษณะทางกายภาพของเส้นเอ็นซึ่งสัมพันธ์กับอายุของเส้นเอ็น โดยมีแนวคิดมาจากการวิจัยของ Goh และคณะ (Goh et al., 2008) ซึ่งได้ทำการทดลองเพื่อหาพฤติกรรมการรับแรงดึงของเส้นเอ็นในทางหนูที่อายุต่างกันและตรวจสอบลักษณะทางโครงสร้างของเส้นเอ็นที่เปลี่ยนไปเมื่ออายุมากขึ้น โดยพบว่า เมื่อเส้นเอ็นมีอายุมากขึ้นเส้นไฟบรืวจะมีขนาดพื้นที่หน้าตัดใหญ่ขึ้นด้วย ซึ่งส่งผลให้เส้นเอ็นมีความแข็งแรงมากขึ้นดังแสดงการเปรียบเทียบความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดขณะรับแรงดึงของเส้นเอ็นในทางหนูที่อายุ 1.6 เดือนและ 4 เดือนดังแสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 พฤติกรรมการรับแรงดึงของเส้นเอ็นในอายุที่ต่างกัน (Goh et al., 2008)

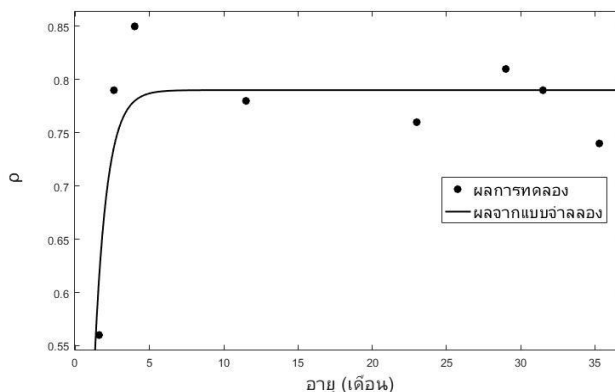
จากงานวิจัยของ Goh และคณะได้ทำการทดลองและพบว่าเมื่อเส้นเอ็นมีอายุมากขึ้นจะส่งผลให้สัดส่วนของพื้นที่หน้าตัดของไฟบรืวทั้งหมดต่อพื้นที่หน้าตัดทั้งหมดของเส้นไฟเบอร์ (ρ) มีค่าสูงขึ้นด้วย โดยค่า ρ ของเส้นเอ็นจะมีค่าสูงขึ้นอย่างรวดเร็วในช่วงที่เส้นเอ็นอยู่ในช่วงอายุในวัยเจริญเติบโตและจะมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก เมื่อเส้นเอ็นเข้าสู่ช่วงอายุในวัยโตเต็มที่แล้ว ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเสนอแบบจำลองของการเปลี่ยนแปลงเชิงโครงสร้างกับอายุของเส้นเอ็นข้อต่อดังนี้

$$\rho = A - Be^{-By} \quad (1)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่

y คือ อายุของเส้นเอ็น

เมื่อทำการ curve fitting ระหว่างแบบจำลองในสมการที่ (1) กับผลการทดลองที่ได้จากงานวิจัยอ้างอิง (Goh et al., 2008) ด้วยวิธีการคำนวณแบบ Nonlinear least squares เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับแบบจำลอง จะได้ค่าเป็น $A = 0.7901$ และ $B = 1.192$ ดังแสดงการเปรียบเทียบในรูปที่ 2 ซึ่งสมการทางคณิตศาสตร์ของแบบจำลองนี้สอดคล้องกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จากผลงานวิจัยของ Tishya และคณะ (Tishya et al., 1998)

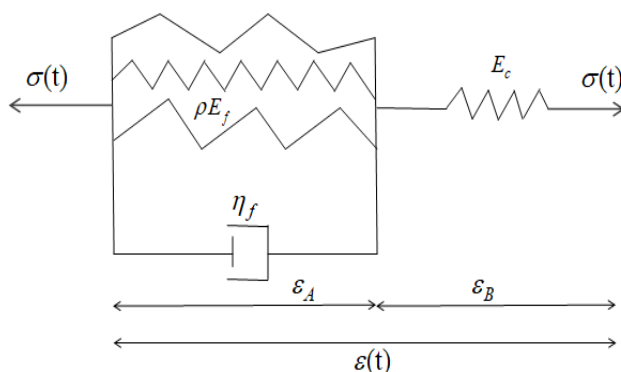


รูปที่ 2 การเปรียบเทียบข้อมูลของผลการทดลองจากงานวิจัยอ้างอิง (Goh et al., 2008) กับผลการคำนวณจากแบบจำลอง เมื่อ $A = 0.7901$ และ $B = 1.192$

ดังนั้นเมื่อกำหนดค่าของเส้นเอ็นและทราบค่า A และ B แล้วจะสามารถคำนวณหาค่า ρ ได้จากสมการที่ (1) และค่า ρ นี้จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณในแบบจำลองทางวิสโคอีลาสติกของเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุแตกต่างกัน ซึ่งจะกล่าวถึงในลำดับต่อไป

แบบจำลองทางวิสโคอีลาสติกและสมการทางคณิตศาสตร์ของเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุแตกต่างกัน

แบบจำลองทางวิสโคอีลาสติกของเส้นเอ็นข้อต่อที่สร้างขึ้นในงานวิจัยนี้ได้ใช้สปริงในการแสดงพฤติกรรม การยืดหยุ่นและใช้ตัวหน่วงในการแสดงพฤติกรรมการหนืดของเส้นเอ็น โดยจำลองให้เส้นไฟเบอร์แต่ละเส้นเป็นสปริงที่มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นคงที่ E_f ซึ่งเมื่อมีการให้แรงดึงแก่เส้นเอ็น เส้นไฟเบอร์บางส่วนจะรับแรงในขณะที่บางส่วนจะขาดออกจากกันทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะการจัดเรียงและความห่อหุ้มของไฟเบอร์นั้น ส่วนเมทริกซ์รอบไฟเบอร์แทนด้วยตัวหน่วงที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดคงที่ η_f ในขณะที่ตัวเชื่อมต่อ (crosslinks) ระหว่างไฟเบอร์แต่ละเส้นถูกจำลองด้วยสปริงที่มีค่าโมดูลัสความยืดหยุ่นคงที่ E_c โดยการจัดเรียงของสปริงและตัวหน่วงที่ใช้แทนส่วนประกอบต่าง ๆ ภายในเส้นเอ็นได้แสดงไว้ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 แบบจำลองทางวิสโคอีลาสติกของเส้นเอ็นข้อต่อในวัยเจริญเติบโต

แบบจำลองทางวิศโคอิสติกนี้สามารถเขียนสมการสมดุลแรงในรูปความเค้นที่เป็นฟังก์ชันของเวลาในการรับแรง (t) ได้ดังนี้

$$\sigma(t) = \sigma_{Ef}(t) + \sigma_{\eta f}(t) = \sigma_{Ec}(t) \quad (2)$$

เมื่อ $\sigma(t)$ คือ ค่าความเค้นรวมของเส้นเอ็น

$\sigma_{Ef}(t)$ คือ ค่าความเค้นของไฟบิวรี

$\sigma_{\eta f}(t)$ คือ ค่าความเค้นของเมทริกซ์

$\sigma_{Ec}(t)$ คือ ค่าความเค้นของตัวเชื่อมต่อระหว่างไฟบิวรีแต่ละเส้น

และสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของความเครียดของส่วนประกอบต่าง ๆ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาในการรับแรง (t) ได้เป็น

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_A(t) + \varepsilon_B(t) \quad (3)$$

$$\text{โดยที่ } \varepsilon_A(t) = \varepsilon_{Ef}(t) = \varepsilon_{\eta f}(t) \quad (4)$$

$$\varepsilon_B(t) = \varepsilon_{Ec}(t) \quad (5)$$

เมื่อ $\varepsilon(t)$ คือ ค่าความเครียดรวมของเส้นเอ็น

$\varepsilon_{Ef}(t)$ คือ ความเครียดของเส้นไฟบิวรี

$\varepsilon_{\eta f}(t)$ คือ ความเครียดของเมทริกซ์

$\varepsilon_{Ec}(t)$ คือ ความเครียดของเชื่อมต่อระหว่างไฟบิวรีแต่ละเส้น

จากสมมติฐานการรับแรงและการขาดออกจากกันของเส้นไฟบิวรีซึ่งกำหนดว่า เมื่อให้แรงแก่เส้นเอ็นข้อต่อเส้นไฟบิวรีบางส่วนจะเริ่มดึงหรือรับแรงที่ค่าความเครียดต่างกัน และในขณะเดียวกันเส้นไฟบิวรีบางส่วนจะค่อย ๆ เริ่มขาดออกจากกันที่ค่าความเครียดต่าง ๆ ไปพร้อมกัน โดยปริมาณของเส้นไฟบิวรีที่รับแรงหรือดึงและขาดออกจากกันจะเป็นไปตามฟังก์ชันการกระจายตัวแบบเอ็กโพเนนเชียล ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการของค่าความเค้นรวมของเส้นไฟบิวรีได้ดังนี้

$$\sigma_{Ef} = \sigma_{a,f} - \sigma_{b,f} \quad (6)$$

เมื่อ $\sigma_{a,f}$ คือ ค่าความเค้นของเส้นไฟบิวรีเมื่อเริ่มดึงหรือเริ่มรับแรงที่ค่าความเครียดต่างกันและสามารถเขียนอยู่ในรูปสมการได้เป็น

$$\sigma_{a,f} = \int_0^{\varepsilon_A} \rho E_f (\varepsilon_A - \varepsilon_s) p(\varepsilon_s) d\varepsilon_s \quad (7)$$

เมื่อ ε_s คือค่าความเครียดที่ไฟบิวรีเริ่มรับแรงและกำหนดให้ $\varepsilon_A > \varepsilon_s$

$p(\varepsilon_s)$ คือ ฟังก์ชันการกระจายตัวแบบเอ็กโพเนนเชียลที่ใช้อธิบายการเริ่มรับแรงของเส้นไฟบิวรีซึ่งมีสมการเป็น

$$p(\varepsilon_s) = \beta e^{-\beta \varepsilon_s} \quad (8)$$

เมื่อ β คือ ตัวแปรอัตราและ $\beta > 0$

สำหรับค่าความเค้นของไฟบิวรีก่อนขาดออกจากกัน ($\sigma_{b,f}$) สามารถเขียนสมการได้เป็น

$$\sigma_{b,f} = P(\varepsilon_b) \rho E_f \varepsilon_A \quad (9)$$

เมื่อ ε_b คือค่าความเครียดของเส้นไฟบิวรีที่เริ่มขาดออกจากกัน

โดยฟังก์ชันการกระจายตัวแบบเอ็กโพเนนเชียลที่ใช้อธิบายการขาดออกจากกันของเส้นไฟบิวรีคือ

$$p(\varepsilon_b) = \alpha e^{\alpha \varepsilon_b} \quad (10)$$

เมื่อ α คือ ตัวแปรอัตราและ $\alpha > 0$ โดยจะสามารถหาค่าปริมาณสะสมของเส้นไฟเบอร์ที่ขาดออกจากกันได้
เป็น

$$P(\varepsilon_b) = \int_0^{\varepsilon_A} p(\varepsilon_b) d\varepsilon_b \quad (11)$$

เมื่อแทนค่าสมการ (10) และ (11) ลงในสมการที่ (9) จะสามารถหาค่าความเค้นของเส้นไฟเบอร์ก่อนขาดออกจากกันได้
ดังสมการนี้

$$\sigma_{b,f} = \frac{\rho E_f e^{\alpha \varepsilon_A} \varepsilon_A}{\alpha} - \frac{\rho E_f \varepsilon_A}{\alpha} \quad (12)$$

และจากสมการที่ (7) สามารถอินทิเกรตและจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\sigma_{a,f} = \rho E_f \varepsilon_A + \frac{\rho E_f e^{-\beta \varepsilon_A}}{\beta} - \frac{\rho E_f}{\beta} \quad (13)$$

ดังนั้นสมการที่ (2) จะสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$\sigma(t) = \sigma_{a,f}(t) - \sigma_{b,f}(t) + \sigma_{\eta f}(t) = \sigma_{Ec}(t) \quad (14)$$

เมื่อแทนค่าความเค้นที่เกิดจากการรับแรงในสมการที่ (13) และความเค้นก่อนขาดออกจากกันของเส้นไฟเบอร์ในสมการ
ที่ (12) ลงในสมการที่ (14) พร้อมจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\sigma = \left[\rho E_f \varepsilon_A + \frac{\rho E_f e^{-\beta \varepsilon_A}}{\beta} - \frac{\rho E_f}{\beta} \right] - \left[\frac{\rho E_f e^{\alpha \varepsilon_A} \varepsilon_A}{\alpha} - \frac{\rho E_f \varepsilon_A}{\alpha} \right] + \eta_f \dot{\varepsilon}_A \quad (15)$$

โดยสมการความเค้นของไฟเบอร์คือ

$$\sigma_{Ef} = \rho E_f \varepsilon_A \quad (16)$$

ความเค้นของตัวเชื่อมต่อระหว่างไฟเบอร์คือ

$$\sigma_{Ec} = E_c \varepsilon_B \quad (17)$$

และความเค้นของเมทริกซ์คือ

$$\sigma_{\eta f} = \eta_f \dot{\varepsilon}_A \quad (18)$$

จากนั้นแทนค่าสมการที่ (16) (17) และ (18) แทนลงในสมการที่ (15) แล้วจัดรูปสมการใหม่จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} = & \left(\frac{E_c \rho E_f}{\eta_f} + \frac{E_c \rho E_f}{\eta_f \alpha} \right) \dot{\varepsilon} + \left(-\frac{\rho E_f}{\eta_f} - \frac{\rho E_f}{\eta_f \alpha} - \frac{E_c}{\eta_f} \right) \sigma - \frac{E_c \rho E_f}{\eta_f \beta} \dot{\varepsilon} + E_c \dot{\varepsilon} + \left(\frac{\rho E_f \sigma}{\eta_f \alpha} - \frac{E_c \rho E_f \varepsilon}{\eta_f \alpha} \right) e^{\alpha \varepsilon - \frac{\alpha \sigma}{E_c}} \\ & + \frac{E_c \rho E_f e^{-\beta \varepsilon + \frac{\beta \sigma}{E_c}}}{\eta_f \beta} \end{aligned} \quad (19)$$

จากสมการที่ (17) และสมการที่ (2) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการ Differential Equation ได้ดังนี้

$$\dot{\varepsilon}_B = \frac{\dot{\sigma}}{E_c} \quad (20)$$

และเมื่อแทนค่าสมการที่ (19) ลงในสมการที่ (20) จะจัดสมการใหม่เป็น

$$\varepsilon_B = \frac{\left(\frac{E_c \rho E_f}{\eta_f} + \frac{E_c \rho E_f}{\eta_f \alpha} \right) \varepsilon + \left(-\frac{\rho E_f}{\eta_f} - \frac{\rho E_f}{\eta_f \alpha} - \frac{E_c}{\eta_f} \right) \sigma - \frac{E_c \rho E_f}{\eta_f \beta}}{E_c} + \frac{E_c \dot{\varepsilon} + \left(\frac{\rho E_f \sigma}{\eta_f \alpha} - \frac{E_c \rho E_f \varepsilon}{\eta_f \alpha} \right) e^{\alpha \varepsilon - \frac{\alpha \sigma}{E_c}}}{E_c} + \frac{E_c \rho E_f e^{-\beta \varepsilon + \frac{\beta \sigma}{E_c}}}{\eta_f \beta}$$

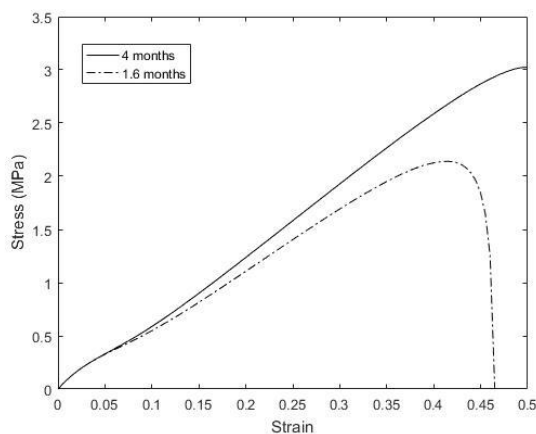
(21)

ดังนั้นสมการที่ (19) และสมการที่ (21) คือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุแตกต่างกัน ซึ่งจัดอยู่ในรูปของระบบสมการ Ordinary Differential Equation (ODE) โดยระบบสมการ ODE นี้จะสามารถหาผลเฉลยได้โดยใช้วิธีการประมาณค่าทางตัวเลข (Numerical method) เมื่อทราบค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองทุกค่าแล้ว แบบจำลองนี้สามารถใช้อธิบายพฤติกรรมการรับแรงดึงและการคลายความเค้นของเส้นเอ็นข้อต่อที่มีอายุแตกต่างกันในวัยเจริญเติบโตได้ ซึ่งได้แสดงผลการคำนวณไว้ในหัวข้อต่อไป

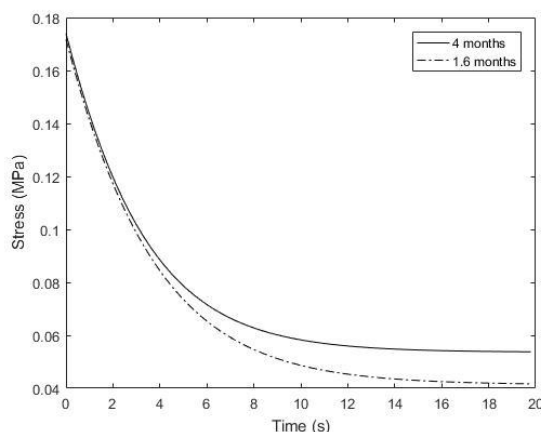
ผลการคำนวณและการวิเคราะห์ผล

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเส้นเอ็นข้อต่อในสมการที่ (19) และ (21) จะสามารถหาผลเฉลยได้โดยใช้วิธีการประมาณค่าเชิงตัวเลขเมื่อทราบค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองซึ่งได้แก่ E_f , E_c , η_f , α , β และ ρ ดังนั้นเพื่อศึกษาและทดสอบความเป็นไปได้ในการอธิบายพฤติกรรมเชิงกลของแบบจำลอง งานวิจัยนี้จึงได้สมมุติค่าพารามิเตอร์เหล่านี้เพื่อใช้ในการคำนวณดังนี้ $E_c = 10\text{MPa}$, $E_f = 417\text{MPa}$, $\eta_f = 50\text{Pa}\cdot\text{s}$, $\alpha = 2$ และ $\beta = 2.8$ สำหรับค่า ρ นั้นสามารถคำนวณได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า ρ กับอายุของเส้นเอ็นในสมการที่ (1) ซึ่งในงานวิจัยนี้จะคำนวณเปรียบเทียบเฉพาะกรณีที่เส้นเอ็นมีอายุ 1.6 และ 4 เดือนซึ่งจะได้ค่า ρ เป็น 0.6131 และ 0.7799 ตามลำดับ

สำหรับกรณีที่เส้นเอ็นถูกดึงด้วยอัตราความเครียด $\dot{\varepsilon} = 0.01/\text{s}$ จะสามารถแสดงผลการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของเส้นเอ็นได้ดังรูปที่ 4 และในกรณีที่เส้นเอ็นถูกดึงไว้ให้มีค่าความเครียดคงที่ที่ $\varepsilon = 0.02$ จะสามารถคำนวณหาค่าความเค้นที่ลดลงตามเวลา ซึ่งเรียกว่าพฤติกรรมการคลายความเค้นได้ดังรูปที่ 5



รูปที่ 4 พฤติกรรมการรับแรงดึงของเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุแตกต่างกันที่คำนวณได้จากแบบจำลอง



รูปที่ 5 พฤติกรรมการคลายความเค้นของเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุแตกต่างกันที่คำนวณได้จากแบบจำลอง

เมื่อเปรียบเทียบกราฟแสดงพฤติกรรมการรับแรงดึงของเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุต่าง ๆ ซึ่งได้จากการคำนวณด้วยแบบจำลองดังแสดงในรูป 4 และที่ได้จากการทดลองจากงานวิจัยอ้างอิง (Goh et al., 2008) ดังแสดงในรูปที่ 1 พบว่าเส้นกราฟที่ได้จากผลการคำนวณและผลการทดลองมีแนวโน้มไปในทางเดียวกัน โดยเส้นกราฟของความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดของเอ็นที่อายุมากกว่าจะมีความชันสูงกว่า ซึ่งแสดงให้เห็นว่าเส้นเอ็นที่อายุมากกว่าจะมีความแข็งแรงมากกว่าเส้นเอ็นที่อายุน้อยกว่า อีกทั้งยังพบว่า ลักษณะของเส้นกราฟแสดงพฤติกรรมการรับแรงดึงที่ได้จากการคำนวณ มีความสอดคล้องกับพฤติกรรมการรับแรงดึงของเส้นเอ็นที่ได้จากการทดลอง โดยในช่วงแรกของการรับแรงดึงของเส้นเอ็นที่ความเครียดมีค่าต่ำมาก ๆ (toe region) เป็นช่วงที่เส้นไฟบิวรัสส่วนมากในเส้นเอ็นเริ่มมีการรับแรง ส่วนช่วงที่สองเป็นช่วงที่มีค่าความเครียดสูงขึ้น โดยเส้นกราฟเป็นเส้นตรงคือช่วงรับแรงแบบเชิงเส้น (linear region) ซึ่งเป็นช่วงที่เส้นไฟบิวรัสส่วนมากรับแรงและจะเริ่มตึงขึ้นเรื่อย ๆ ตามแรงที่รับ สุดท้ายช่วงที่สามเป็นช่วงการขาดของเส้นเอ็น (failure region) โดยเป็นช่วงที่เส้นไฟบิวรัสส่วนมากเริ่มขาดไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงจุดเสียหายของเส้นเอ็นซึ่งเส้นกราฟจะมีลักษณะแบบไม่เชิงเส้นและจะหักลงอย่างรวดเร็ว

และเมื่อเปรียบเทียบกราฟแสดงพฤติกรรมการคลายความเค้นของเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุต่าง ๆ ซึ่งได้จากการคำนวณจากแบบจำลองดังแสดงในรูป 5 และที่ได้จากการทดลองจากงานวิจัยอ้างอิง (Johannes et al., 2013) พบว่าเส้นกราฟที่ได้จากผลการคำนวณและผลการทดลองมีแนวโน้มไปในทางเดียวกัน โดยเส้นกราฟของความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับเวลาที่อายุน้อยกว่าจะมีลักษณะที่การลดลงของค่าความเค้นที่มากกว่าและเข้าสู่สมดุลได้ช้ากว่าเส้นเอ็นที่มีอายุมากกว่า ในขณะที่ค่าความเค้นสมดุลของเส้นเอ็นที่อายุมากกว่าจะมีค่าสูงกว่า ซึ่งจะแสดงให้เห็นว่าเส้นเอ็นที่อายุมากกว่ามีค่าความแข็งแรงสูงกว่าเส้นเอ็นที่อายุน้อยกว่า

สรุปผลการวิจัย

แบบจำลองทางวิศโคอีลาสติกที่สร้างขึ้นในงานวิจัยนี้สามารถอธิบายพฤติกรรมการรับแรงดึงและการคลายความเค้นของเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุต่างกัน ในวัยเจริญเติบโตได้เป็นอย่างดี โดยผลการคำนวณจากแบบจำลองมีความสอดคล้องกับผลการทดลองจากงานวิจัยอ้างอิง (Goh et al., 2008; Johannes et al., 2013) ซึ่งทำการทดลองในเส้นเอ็นของหนู โดยองค์ความรู้ที่ได้จากงานวิจัยนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบแบบจำลองพฤติกรรมเชิงกลของเส้นเอ็นในสัตว์ชนิดอื่นได้ด้วย อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้ได้สมมุติค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองขึ้นเพื่อดูแนวโน้มของ

กราฟเทียบกับผลการทดลองเท่านั้น ดังนั้นเพื่อให้ได้ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับการนำแบบจำลองไปใช้
คาดการณ์พฤติกรรมเชิงกลของเส้นเอ็นข้อต่อที่อายุต่าง ๆ ได้ จึงจำเป็นที่ต้องมีวิธีการหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลอง
ที่ถูกต้องและเหมาะสม ซึ่งผลการวิจัยส่วนนี้ยังอยู่ในขั้นตอนการดำเนินงานของผู้วิจัย

เอกสารอ้างอิง

- Abramowitch, S.D, Woo, S.L, Clineff, T.D, et al. An evaluation of the quasi-linear viscoelastic properties of the healing medial collateral ligament in a goat model. *Biomedical Engineering Annals* 2004; 329– 335.
- Andrew A, Dunkman, Mark R. Buckley, Michael j, Mienaltowski, Sheila M. Adams, et al. Decorin expression is important for age-related changes in tendon structure and mechanical properties. *Matrix Biology* 2013; 32:3-13.
- A.Nedergaard, K. Henriksen, M.A. Karsdal, C. Christiansen. Musculoskeletal ageing and primary prevention. *Best Practice & Research Clinical Obstetrics & Gynaecology* 2013; 27 (25): 673-688.
- Bailey A, Paul R, Knott L. Mechanisms of maturation and ageing of collagen. *Mech. Ageing* 1998 ; 106:1–56.
- C. Machiraju, A. V. Phan, A.W. Pearsall, S. Madanagopal. Viscoelastic studies of human subscapularis tendon:Relaxation test and a Wiechert model. *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 2006; 83: 29-33.
- Fabricio, R.Barin, João Luiz ,Q. Durigan, Rita de C. Marqueti. Beneficial effects of resistance training on the protein profile of the calcaneal tendon during aging. *Experimental Gerontology* 2017; 100: 54–62.
- Gladius Lewis, Kevin M. Shaw. Tensile Properties of Human Tendon Achilles : Effect of Donor Age and Strain Rate. *The Journal of Foot & Ankle Surgery* 1997; 36(6):435-445.
- G.L. Onambele-Pearson, S.J. Pearson. The magnitude and character of resistance training-induced increase in tendon stiffness at old age is gender specific, *Age* (2012); 34(2): 427–438.
- Gion Fessel, Christian Gerber, Jess G. Snedeker. Potential of collagen cross - linking therapies to mediate tendon mechanical properties. *J Shoulder Elbow Surg.* 2012; 21:209-217.
- Goh KL, Holmes DF, Lu HY, Richardson S, Kadler KE, Purslow PP, et al. Ageing changes in the tensile properties of tendons: influence of collagen fibril volume fraction. *Journal of Biomechanical Engineering* 2008.
- Johannes F, Plate, Walter F, Wiggins, Patrick Haubruck, Aaron T, et al. Normal aging alters in vivo passive biomechanical response of the rat gastrocnemius-Achilles muscle–tendon unit. *Journal of Biomechanics* 2013; 46:450-455.
- Kamel, H.K. Sarcopenia and aging. *Nutr. Rev* 2003; 61: 157–167.
- Kuroda Y, Ditrix A, Knuttgen HG, Tittel K. Sport and physical activities in older people: maintenance of physical fitness. *The Olympic Book of Sports Medicine*. Oxford, England: Blackwell Scientific Publications 1988; 331–339.
- M.R. Dressler, D.L. Butler, G.P. Boivin. Age-related changes in the biomechanics of healing patellar tendon. *Journal of Biomechanics* 2006; 39: 2205-2212.
- Ratchada Sopakayang, Raffaella De Vitab. A mathematical model for creep, relaxation and strain stiffening in parallel-fibered collagenous tissues. *Medical Engineering & Physics* 2011; 33: 1056– 1063.



- Ratchada Sopakayang. A New Viscoelastic Model for Preconditioning in Ligaments and Tendons. Proceedings of the World Congress on Engineering; 2013 Vol III; July 3-5; London, U.K., WCE 2013.
- Rene B. Svensson, Stuart T. Smith, Patrick j. Moyer, S. Peter Magnusson. Effects of maturation and advanced glycation on tensile mechanics of collagen fibrils from rat tail and Achilles tendons. *Acta Biomaterialia* 2018; 70: 270-280.
- Rita de Cassia Marqueti, jeeser Alves Almeida, Wilson Romero Nakagaki. Resistance training minimizes the biomechanical effects of aging in three different rat tendons. *Journal of Biomechanics* 2017; 53: 29-35.
- Shearer. A new strain energy function for modeling ligaments and tendons whose fascicles have a helical arrangement Of fibrils. *Journal of Biomechanics* 2015; 48:3017–3025.
- Spiesz EM, Thorpe CT, Chaudhry S, Riley GP, Birch HL, Clegg PD, et al. Tendon extracellular matrix damage, degradation and inflammation in response to in vitro overload exercise. *J. Orthop* 2015;33: 889–897.
- Tishya A.L. Wren, Gary S. Beaupre, Dennis R. Carter. A model for loading-dependent growth, development, and adaptation of tendons and ligaments. *Journal of Biomechanics* 1998; 31: 107-114.
- Thomas D.O Brien, Neil D. Reeves, Vasilios Baltzopoulos, David A. Jones. Mechanical properties of the patellar tendon in adults and children. *Journal of Biomechanics* 2010; 43: 1190-1195.
- Tom Shearer. A new strain energy function for modelling ligaments and tendons whose fascicles have a helical arrangement of fibrils. *Journal of Biomechanics* 2015; 48: 3017–3025.
- Youichi Yasui, Ichiro Tonogai, Andrew J. Rosenbaum, Yoshiharu Shimozono, Hirotaka Kawano, John G. Kennedy. The Risk of Achilles Tendon Rupture in the Patients with Achilles Tendinopathy : Healthcare Database Analysis in the United States. *BioMed Research International* 2017.